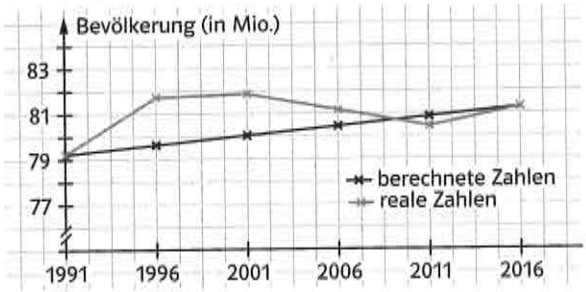
3

Jahr	berechnete Zahlen	reale Zahlen
1991	79,221	79,221
1996	79,622	81,741
2001	80,025	81,853
2006	80,430	81,151
2011	80,837	80,430
2016	81,246	81,247



Die berechneten Zahlen gehen von einem durchschnittlichen Wachstum aus, das über die Jahre konstant bleibt (linearer Verlauf).

Halbwertzeit

4 a) 17 g b) 1200 s

5

Isotop	bis 2014 Reduzierung um	10 % Bestand im Jahr
Jod-131	100 %	1986, nach 27 Tagen
Cäsium-134	99,994 %	1993
Cäsium-137	47,635 %	2086
Strontium-90	49,028 %	2082

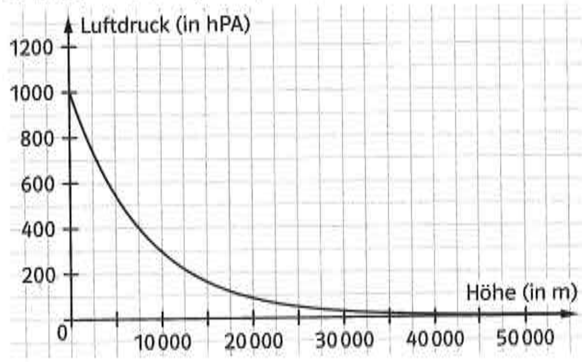
Seite 80

6 Der Index für Wohnungsmieten verläuft in etwa geradlinig, deshalb kann man Aussagen für die nächsten Jahre treffen, z. B.:
2012: 108,6; 2013: 109,9; 2014: 111,2
Beim gesamten Verbraucherpreisindex ist es schwieriger Aussagen zu treffen, da die Schwankungen stärker sind. Entwickelt er sich weiter wie zwischen den Jahren 2009 und 2011 (mittlere Steigerung um etwa 1,7 %), dann könnte es so weitergehen:
2012: 112,6; 2013: 114,5

7 a) Kilimandscharo:
$p(5895) = 1013 \cdot (1 - 0{,}0123)^{58{,}95} \approx 482$
Mount Everest:
$p(8848) = 1013 \cdot (1 - 0{,}0123)^{88{,}48} \approx 339$

b) $p(500) = 1013 \cdot (1 - 0{,}0123)^{5}$
$p(841) = 1013 \cdot (1 - 0{,}0123)^{8{,}41}$
$p\,\% = \frac{p(500) - p(841)}{p(500)} \approx 4{,}1\,\%$

c) $p(n) = 1013 \cdot (1 - 0{,}0123)^{n:100}$



Generationszeit

8 Nach drei Monaten sind es 40 Ratten. In 34,5 Monaten sind es 80 Mio. Bei einer Generationszeit von 60 Tagen dauert es etwa 46 Monate.

9 6400 Bakterien

10 nach etwa 20 Wochen

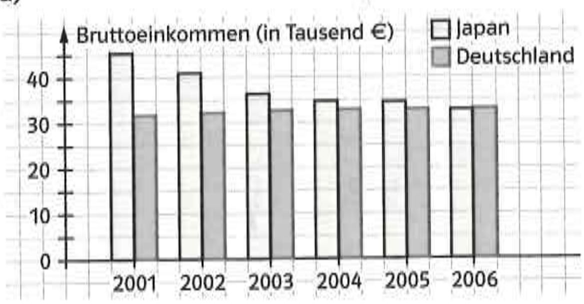
Üben • Anwenden • Nachdenken Seite 82

1 $p\,\% = 35\,\% \Longrightarrow q = 1{,}35$;
$p\,\% = -12\,\% \Longrightarrow q = 0{,}88$
$q = 1{,}41 \Longrightarrow p\,\% = 41\,\%$;
$q = 0{,}75 \Longrightarrow p\,\% = -25\,\%$

2

	alte Größe	neue Größe	Wachstumsrate (p %)	Wachstumsfaktor (q)
a)	4500 €	4554 €	**1,2**	**1,012**
b)	2,75 m	**2,85 m**	3,5	**1,035**
c)	**432,23 kg**	456 kg	**5,5**	1,055
d)	4,78 t	**4,59 t**	**−4**	0,96
e)	**14 602 Stück**	12 850 Stück	−12	**0,88**

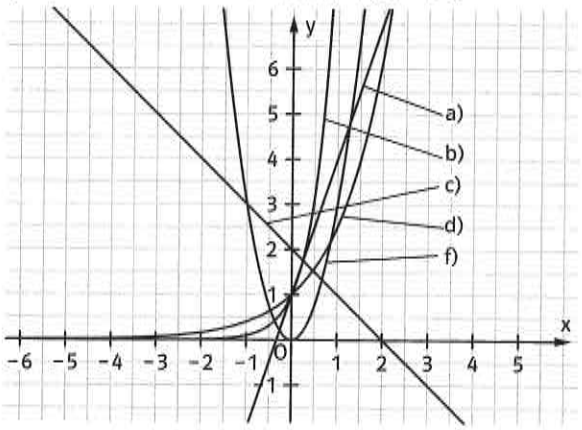
3 a)



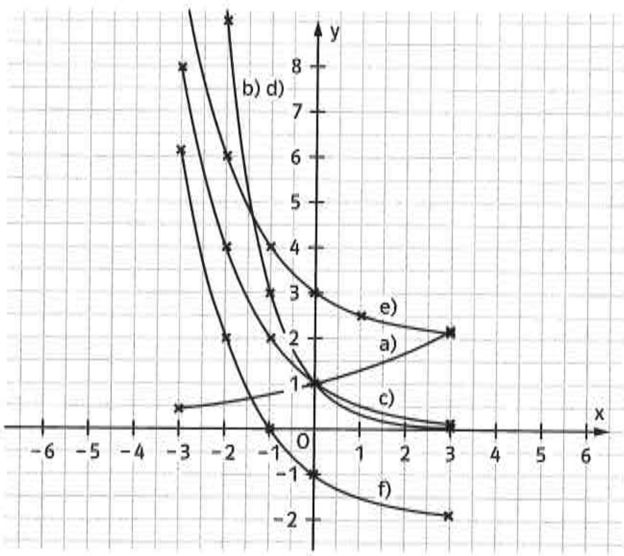
b) Japan: −2,52 Tausend €;
Deutschland: +0,22 Tausend €
c) Die Lohnentwicklung hängt in Deutschland von der Preissteigerungsrate ab. Ab 2001 lag der Wert immer zwischen 2,0 % und 1,0 %. Die starke wirtschaftliche Entwicklung Japans nach dem 2. Weltkrieg spiegelt sich auch in der Lohnentwicklung wider. Gegen Ende des 20. Jahrhunderts setzte in Japan eine wirtschaftliche Rezession ein mit den entsprechenden Auswirkungen auf die Lohnentwicklung.

4 a) 2,35 €
b) Nein, die Steigerung betrug 21 %.
c) Individuelle Lösungen
d) Individuelle Lösungen

5 a) lineares Wachstum; $f(x) = 3x + 1$
b) exponentielles Wachstum; $f(x) = 10^x$
c) lineares Wachstum; $f(x) = -x + 2$
d) exponentielles Wachstum; $f(x) = 2{,}5^x$
e) –
f) quadratisches Wachstum; $f(x) = 3x^2$



6



7 a) zwischen $x = 4{,}5$ und $x = 5$
b) zwischen $x = 10{,}2$ und $x = 10{,}3$

8 Im Jahr 2022 werden sie gleich viel Geld haben.

9 a) $8\,500\,000 \cdot q^{10} = 9\,600\,000$
$\Longrightarrow q = \sqrt[10]{\frac{96}{85}} \approx 1{,}0122$, also $p\,\% \approx 1{,}22\,\%$
Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor beträgt ca. 1,0122; die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate ist etwa 1,22 %.
b) Beispiellösung für das Jahr 2016:
$9\,600\,000 \cdot 1{,}0122^{26} = 13\,158\,182$

Seite 83

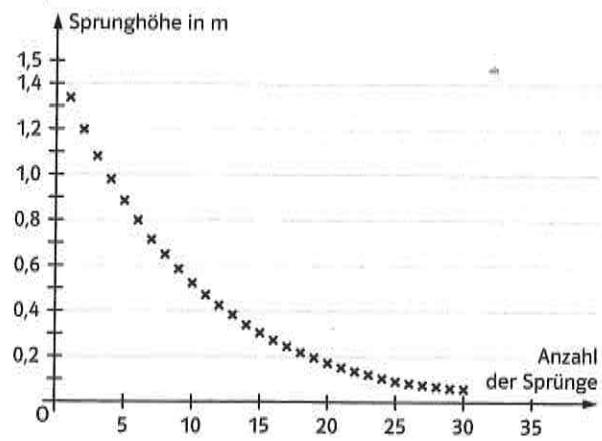
10 a) $p\,\% = 5{,}2\,\%$
b) nach 16 Jahren
c) 4500 €

11 80,25 %

12 a) $120 : 18{,}8 \approx 6{,}4$
$400 \cdot 2^{6,4} \approx 33\,779$
Es sind rund 33 800 Bakterien.
b) $60 : 18{,}8 \approx 3{,}2$
$400 \cdot 2^{-3,2} \approx 44$
Es sind rund 44 Bakterien.

13 a) Innerhalb von 5 Stunden verdoppelt sich die Zahl der Salmonellen 10-mal: $120 \cdot 2^{10} = 122\,880$
Um 13 Uhr enthält die Speise 122 880 Salmonellen.
b) $120 \cdot 2^2 = 480$
c) Nach $10 \cdot 2\frac{1}{2} = 25$ Stunden
Die gekühlte Speise hat somit am folgenden Tag um 14 Uhr eine gleich hohe Anzahl von Salmonellen (122 880).

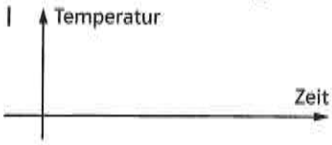
14 a) 20-mal
b) 89 cm
c) 18,04 m
d)



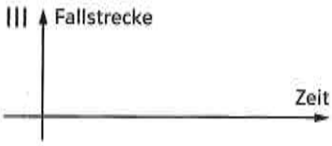
15 a) $T_5 = T_0 \cdot 0{,}9^5 = 90 \cdot 0{,}9^5 \approx 53{,}1$
$T_{10} = 90 \cdot 0{,}9^{10} \approx 31{,}4$
$T_{15} = 90 \cdot 0{,}9^{15} \approx 18{,}5$
Nein, da diese Temperatur unter Raumtemperatur liegt.
b) Man sollte die Milch sofort hinzufügen. Dann fällt die Temperatur zwar auf 82 °C, das ist aber immer noch höher als die Temperatur, die der Kaffee nach 1 Minute Abkühlen hätte. Je höher der Startwert, desto länger bleibt der Kaffee heiß.

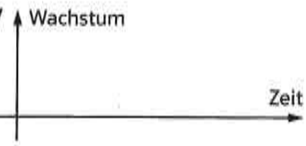
Wachstum und Zerfall

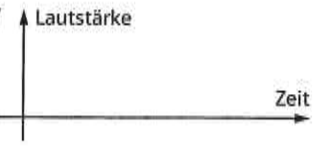
16 a) A → II; B → III; C → V; D → VI; E → IV; F → I
b) Individuelle Lösungen

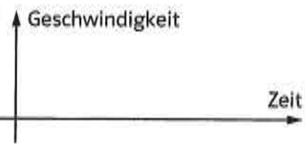
I


II


III


IV


V


VI


Seite 84

17 a) Die Abschreibung über das Alter ist eine exponentielle Abnahme, über die gelaufene Kilometerzahl ist es eine lineare Abnahme.
Pkw A = 60 % des Neuwertes $\cdot\, 0{,}8^3$ + 40 % des Neuwertes $\cdot\, 0{,}56$
Pkw B = 60 % des Neuwertes $\cdot\, 0{,}8^5$ + 40 % des Neuwertes $\cdot\, 0{,}79$
b) Pkw A ≈ 7968 €; Pkw B ≈ 7689 €

18 a) nach 3 Halbwertzeiten: 12,5 %
nach 5 Halbwertzeiten: 3,125 %
nach 10 Halbwertzeiten: 0,1 %
b) nach 2 Halbwertzeiten: 75 %
nach 4 Halbwertzeiten: 93,75 %
nach 8 Halbwertzeiten: 99,61 %

	verstrichene Zeit nach Halbwertzeiten		
Name	2	3	4
Radium-228	11,5 a	17,25 a	23 a
Plutonium-239	$4{,}82 \cdot 10^4$ a	$7{,}23 \cdot 10^4$ a	$9{,}64 \cdot 10^4$ a
Uran-234	$4{,}92 \cdot 10^5$ a	$7{,}38 \cdot 10^5$ a	$9{,}84 \cdot 10^5$ a
Neon-17	218 ms	327 ms	436 ms
Francium-223	44 min	66 min	88 min

	verstrichene Zeit nach Halbwertzeiten		
Name	5	8	10
Radium-228	28,75 a	46 a	57,5 a
Plutonium-239	$12{,}05 \cdot 10^4$ a	$19{,}28 \cdot 10^4$ a	$24{,}1 \cdot 10^4$ a
Uran-234	$12{,}3 \cdot 10^5$ a	$19{,}68 \cdot 10^5$ a	$24{,}6 \cdot 10^5$ a
Neon-17	545 ms	872 ms	1090 ms
Francium-223	110 min	176 min	220 min

19 10 % → 100 Jahre; 1 % → 200 Jahre;
0,1 % → 300 Jahre

Logarithmieren

20 a) mögliche Beispiele

Zahl	log
5	0,6989
50	1,6989
500	2,6989
10	1
100	2
1000	3

b) log 10 000 = 4, denn $10^4 = 10\,000$ und individuelle Lösungen
c) log 1000 = 3, denn $10^3 = 1000$

21 a) Wenn $5^x = 25$, dann ist $x = 2$.
Allgemein kann man sagen:
Wenn $a^x = y$, dann ist $\log y : \log a = x$.
b) $x \approx 3{,}56$ $x \approx 116{,}90$ $x \approx 62{,}92$
$x \approx 2{,}30$ $x \approx 185{,}07$ $x \approx 11{,}45$

Seite 85

22 a) Es sind noch 73,5 % der Strahlenstärke vorhanden.
b) 45 mm

23 $x^6 = 0{,}66;\ x \approx 0{,}933$
$0{,}933^t = 0{,}5;\ t \approx 10$
Die Halbwertzeit beträgt rund 10 Jahre.

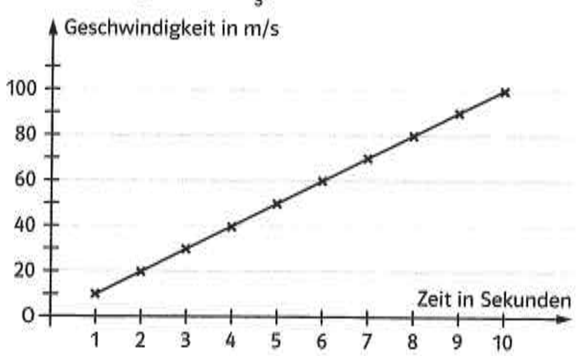
24 Bevölkerung Indiens in Millionen im Jahr 2014 + n: $1296{,}2 \cdot 1{,}015^n$
Bevölkerung Chinas in Millionen im Jahr 2014 + n: $1364{,}1 \cdot 1{,}005^n$
Aus $1296{,}2 \cdot 1{,}015^n = 1364{,}1 \cdot 1{,}005^n$
folgt: $\left(\frac{1{,}015}{1{,}005}\right)^n = \frac{1364{,}1}{1296{,}2}$; d.h. $1{,}00995^n \approx 1{,}05$
Durch Ausprobieren ergibt sich $n \approx 5$.
Im Jahr 2019 werden unter diesen Voraussetzungen genauso viele Menschen in Indien wie in China leben.

25 a) Der Druck in 3 m Tiefe beträgt 1300 hPa.
b) Im Marianengraben beträgt der Druck 1 101 000 hPa. (Es gilt $p = 100x + 1000$; x Wassertiefe in m, p in hPa.)
c) Er tauchte 224 m tief.

26 a) $W_n = W_0 \cdot q^n$
$n = 24;\ W_{24} = 3 \cdot W_0$
$3 = q^{24} \implies q = 1{,}0467$
tägliches Wachstum: 4,67 %
b) $68\,800\,km^2 = 68\,800 \cdot 10^6\,m^2 = 6{,}88 \cdot 10^{10}\,m^2$
Gleichung aufstellen: $3^x > 6{,}88 \cdot 10^{10}$
Durch Ausprobieren lösen: $x \approx 23$
Anzahl Tage: $24 \cdot x = 24 \cdot 23 \approx 552$
Es dauert ca. 552 Tage, bis der See vollständig bedeckt ist.

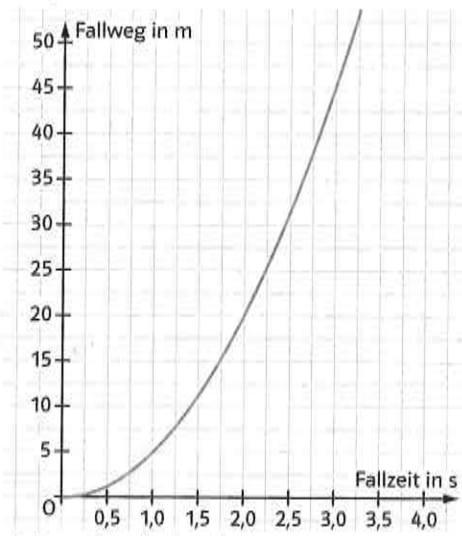
Bungee-Jumping

27 a) Es ist eine lineare Funktion. Es gilt:
Geschwindigkeit = $10\,\frac{m}{s^2} \cdot$ Zeit



b) Fallweg bei 0,6 Sekunden = 1,8 m
Fallweg bei 3 s = 45 m

c) Der Zusammenhang zwischen Fallzeit und Fallweg kann durch eine quadratische Funktion ausgedrückt werden: $s = 5 \cdot t^2$



d) Der Graph der Zeit und der Geschwindigkeit ist eine Gerade. Der Graph der Fallzeit und des Fallwegs verläuft parabelförmig.
e) Individuelle Lösungen

Seite 86

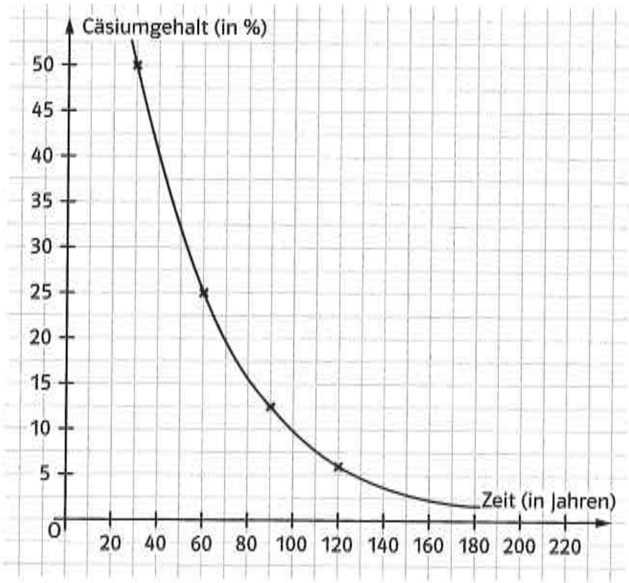
Die C_{14}-Methode

28 Es gilt $G_{5730} = \frac{1}{2}G_0 = G_0 \cdot q^{5730} \implies q^{5730} = \frac{1}{2}$
$\implies q = \sqrt[5730]{0{,}5} \approx 0{,}999879$
Gesucht ist die Zeitspanne x, für die gilt:
$0{,}13 \cdot G_0 = G_0 \cdot 0{,}999879^x$
$x = \frac{\log_{10} 0{,}13}{\log_{10} 0{,}999879} \approx 16\,860$
Die Lascaux-Höhle ist etwa 16 860 Jahre älter als das Jahr 1950, sie ist also etwa im Jahr 14 910 vor Christus entstanden.

29 Gesucht ist die Zeitspanne x, für die gilt:
$0{,}674 \cdot G_0 = G_0 \cdot 0{,}999879^x$
$x = \frac{\log_{10} 0{,}674}{\log_{10} 0{,}999879} \approx 3260$
Tutanchamun starb etwa im Jahr 1338 vor Christus (1922 − 3260 = −1338).

30 a) Individuelle Lösungen; da ca. 50 % des ursprünglichen C-14-Gehalts gemessen wurden, entspricht das Alter der Leiche in etwa der Halbwertzeit.
b) Gesucht ist die Zeitspanne x, für die gilt:
$0{,}5335 \cdot G_0 = G_0 \cdot 0{,}999879^x$
$x = \frac{\log_{10} 0{,}5335}{\log_{10} 0{,}999879} \approx 5192$
Ötzi hat vor etwa 5210 Jahren gelebt.

31 a) 25 %: nach etwa 60,34 Jahren
12,5 %: nach etwa 90,51 Jahren
b)

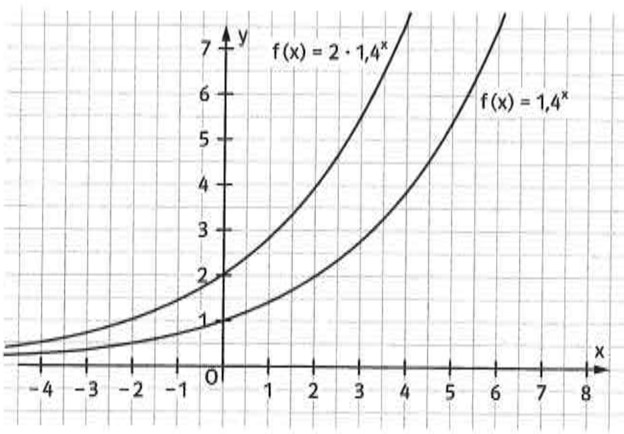


20 % Cäsium: nach ca. 70 Jahren (im Jahr 2056)
10 % Cäsium: nach ca. 100 Jahren (im Jahr 2086)
5 % Cäsium: nach ca. 130 Jahren (im Jahr 2116)
2 % Cäsium: nach ca. 170 Jahren (im Jahr 2156)

32 $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x = \frac{1}{2} \cdot 2^x \Longrightarrow f(x) = 2^{x-1}$
Die Wertetabelle für $f(x) = 2^{x-1}$ ist in Bezug zu derjenigen von $g(x) = 2^x$ um 1 nach rechts verschoben, daher ist auch der Graph von $f(x) = 2^{x-1}$ um 1 nach rechts verschoben.

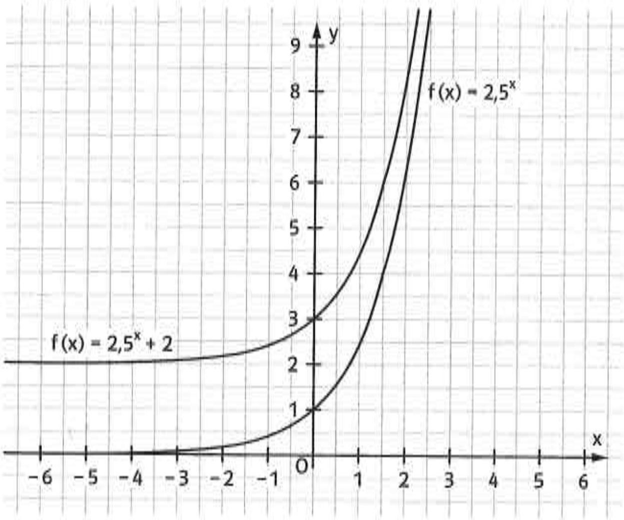
33 An der Stelle $x = 0$ gilt: $f(x) = a^0 \Longrightarrow f(x) = 1$, und zwar unabhängig von dem konkreten Wert von a. Somit gehen alle Funktionen der Form $f(x) = a^x$ durch den Punkt (0 | 1). Dieser Punkt ist auch der einzige gemeinsame Punkt, da bei $a \neq b$ (und $x \neq 0$) stets gilt: $a^x \neq b^x$.

34 a)



Die Funktionswerte der Funktion $f(x) = 2 \cdot 1{,}4^x$ sind jeweils doppelt so groß wie diejenigen der Funktion $f(x) = 1{,}4^x$; folglich wächst $f(x) = 2 \cdot 1{,}4^x$ viel steiler.

b)



Der Graph der Funktion $f(x) = 2{,}5^x + 2$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = 2{,}5^x$, indem man ihn um 2 LE entlang der y-Achse nach oben verschiebt.

Rückspiegel Seite 87

Die Lösungen zum Rückspiegel befinden sich am Ende des Schülerbuches.