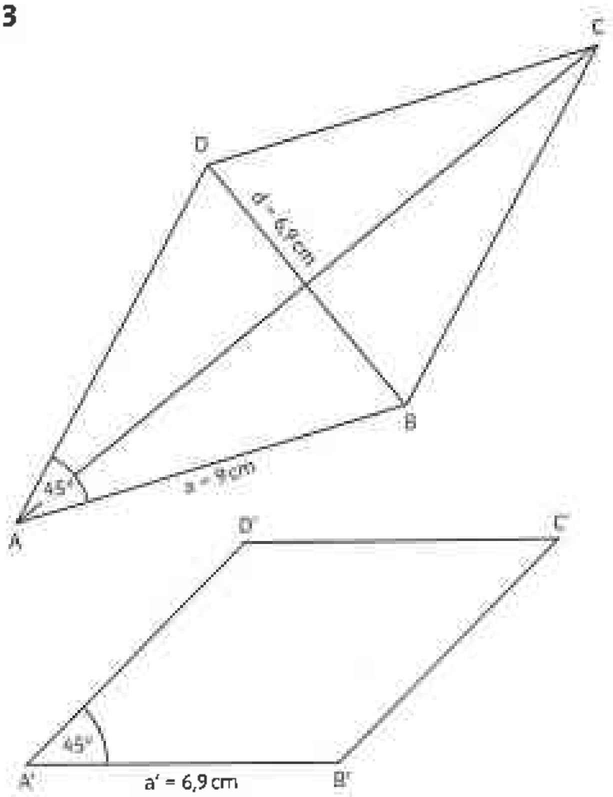
Üben • Anwenden • Nachdenken

Seite 117

1 Der Flächeninhalt ändert sich mit $f = k^2$.
$f = \frac{162}{72} = 2{,}25$; $k = 1{,}5$. Der Umfang ändert sich mit $k = 1{,}5$.

2 Die Diagonale eine Quadrats mit der Seitenlänge a ist $d = a \cdot \sqrt{2}$. Da d die neue Seitenlänge ist, ist $k = \sqrt{2}$.

3



4 a) $k = \frac{12}{8} = 1{,}5$; $a_2 = 12\,cm$; $b_2 = 13{,}5\,cm$; $c_2 = 18\,cm$
Volumen des ersten Quaders:
$V_1 = 8 \cdot 9 \cdot 12 = 864\,cm^3$; $V_2 = k^3 \cdot V_1 = 3{,}375 \cdot 864 = 2916\,cm^3$
b) Oberfläche des ersten Quaders:
$O_1 = 8 \cdot 9 \cdot 2 + 9 \cdot 12 \cdot 2 + 8 \cdot 12 \cdot 2 = 552\,cm^2$;
$O_2 = k^2 \cdot O_1 = 2{,}25 \cdot 552 = 1242\,cm^2$

5

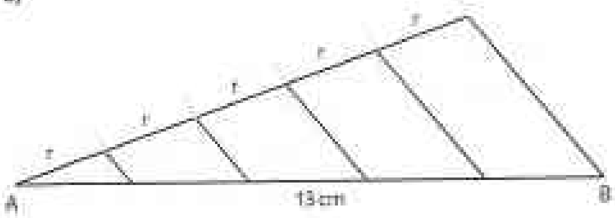
	a	b	c	a'	b'	c'	k
a)	7,0	5,6	9,8	17,5	14,0	24,5	2,5
b)	5,0	10,5	7,5	11,0	23,1	15,6	$\frac{c}{c'}$ n.ä.
c)	10,8	16,2	7,2	7,2	10,8	4,8	$\frac{2}{3}$

6 Durch systematisches Probieren kann man Seiten zuordnen, die den gleichen Faktor k haben.
$\frac{6}{4} = 1{,}5$; $\frac{9}{6} = 1{,}5$. Die dritte Seite muss dann $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5\,cm$ lang sein, damit die Dreiecke ähnlich sind.

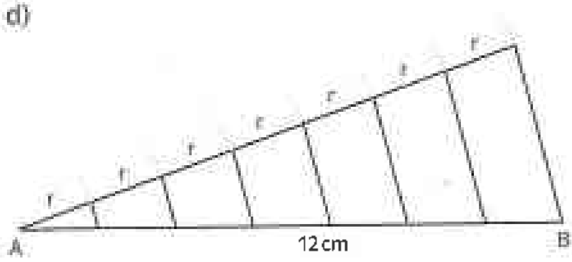
7 Man probiert erneut.
(1) $\frac{6}{4} = 1{,}5$; aber $\frac{10}{6} \neq 1{,}5$ und $\frac{10}{5} = 2 \neq 1{,}5$
(2) $\frac{6}{5} = 1{,}2$; aber $\frac{10}{4} \neq 1{,}2$ und $\frac{10}{6} = \neq 1{,}2$
(3) $\frac{6}{6} = 1$, aber $\frac{10}{4} \neq 1$ und $\frac{10}{5} = \neq 1$
Das Dreieck kann nicht ähnlich sein.

8 a) Durch die Konstruktion ist klar, dass alle Linien zwischen den beiden Strahlen parallel sind. Der Strahlensatz kann also angewandt werden.
Es gilt
$\frac{r}{2r} = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$;
$\frac{1}{2} = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$
$(x_1 + x_2) = 2 \cdot x_1$; $x_1 = x_2$
$\frac{2r}{3r} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3}$;
$\frac{2}{3} = \frac{2x_1}{2 \cdot x_1 + x_3}$, da $x_1 = x_2$
$2 \cdot (2 \cdot x_1 + x_3) = 6 \cdot x_1$
$2 \cdot x_1 = 2 \cdot x_3$; $x_1 = x_3$
In den gesamten Umformungen tauchen der Winkel und die exakte Länge der Strecke r nicht auf. Sie sind deshalb für die Konstruktion nicht entscheidend.
b)

c)



d)



9 a) $k = \frac{b'}{b} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$
$a' = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8\,\text{cm}$; $c' = \frac{7{,}2 \cdot 4}{3} = 9{,}6\,\text{cm}$
$d = \frac{12{,}4}{\frac{4}{3}} = 9{,}3\,\text{cm}$
b) $f = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1{,}78 = \frac{178}{100} = 178\,\%$. Der Flächeninhalt des größeren Vierecks ist also 78 % größer als der des kleineren.

Seite 118

10 Man verlängert die beiden nicht parallelen Seiten des Trapezes so, dass sie sich schneiden und berechnet die fehlende Strecke s.
a) $\frac{s}{s + 54} = \frac{19}{34}$; $s = 68{,}4\,\text{mm}$
$\frac{x}{19} = \frac{68{,}4 + 54 + 39}{68{,}4}$; $x \approx 45\,\text{mm}$
b) $\frac{s}{s + 35 + 25} = \frac{28}{52}$; $s = 70\,\text{mm}$
$\frac{x}{28} = \frac{70 + 35}{70}$; $x = 42\,\text{mm}$
c) $\frac{s}{s + x} = \frac{21}{61}$ und $\frac{s}{s + (x - 27)} = \frac{21}{37}$;
$40s = 21x$; $s = 0{,}525x$
In die zweite Gleichung einsetzen:
$\frac{0{,}525x}{0{,}525x + x - 27} = \frac{21}{37}$
$0{,}525 \cdot 37 \cdot x = 21 \cdot (1{,}525x - 27)$
$12{,}6x = 567$; $x = 45\,\text{mm}$

11 a) $\frac{x}{40} = \frac{60 - x}{60}$
$60x = 2400 - 40x$; $100x = 2400$; $x = 24\,\text{mm}$
b) Sina verwendet ähnliche Dreiecke, die zur gleichen Gleichung führen, wenn man das mittlere und das große Dreieck verwendet.
c) Er zeichnet die Winkelhalbierende des rechten Winkels ein. Der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit der Hypotenuse des großen Dreiecks ist der dem ersten rechten Winkel gegenüberliegende Eckpunkt des zu konstruierenden Quadrates. Von diesem ausgehend kann er das Lot auf die beiden Katheten des großen Dreiecks fällen und erhält so das vollständige Quadrat.

12 a) l_o: Länge des oberen Sees
l_u: Länge des unteren Sees
$\frac{l_u}{l_u + 78{,}2} = \frac{65{,}8}{259{,}3}$; $l_u \approx 26{,}6\,\text{m}$
$\frac{l_o}{l_o + 122{,}8} = \frac{26{,}6}{104{,}8}$; $l_o \approx 41{,}8\,\text{m}$
Diese Aufgabe macht die Grenzen der mathematischen Modellierung deutlich: Zunächst muss man sich natürlich fragen, was die „Länge eines Sees" ist. Man könnte davon ausgehen, dass die Länge des Sees die längste Entfernung zweier Punkte am Ufer ist.
Das Problem ist aber dann, dass man in den seltensten Fällen direkt bis ans Ufer kommt, da Pflanzen im Weg sein können.
Bei der Grafik im Schülerbuch ergibt sich ein weiteres Problem: Es sieht so aus, als habe man bei dem unteren See nicht die längste Strecke gewählt!

13 a) Es gilt: $2300 : 100 = x : 12$, daraus folgt
$x = 23 \cdot 12 = 276\,\text{m}$
b) 100 % Steigung bedeutet, dass eine Straße auf 100 m um 100 m ansteigt. Dies entspricht einem Winkel von 45°.

Quadrat gesucht

- Man findet heraus, dass $x = 40\,\text{mm}$ ist.
- Man verlängert die nichtparallelen Seiten des Trapezes, sodass sie sich schneiden.

$\frac{s}{s + (72 - x)} = \frac{32}{x}$ und $\frac{s}{s + 72} = \frac{32}{50}$
Aus der zweiten Gleichung folgt $s = 128\,\text{mm}$.
Man setzt s in die erste Gleichung ein:
$\frac{128}{128 + 72 - x} = \frac{32}{x}$
$128x = 6400 - 32x$
$160x = 6400$; $x = 40\,\text{mm}$
$x = -\frac{2{,}8}{7{,}2x + 5}$
Für die Seitenlänge 2,2 ist $x = 3{,}6\,\text{cm}$;
für 4,2 ist $x = 4{,}5\,\text{cm}$ und für 4,7 ist $x = 4{,}8\,\text{cm}$.
- Lösungsansatz siehe oben

Seite 119

14 a) Es gilt: $\frac{30{,}5\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{93\,\text{cm}}{x}$, daraus folgt
$x = \left(\frac{93 \cdot 10}{30{,}5}\right)\text{cm} \approx 30{,}5\,\text{cm}$
Damit ist die äußere Leine $122\,\text{cm} = 1{,}22\,\text{m}$ lang.
b) Die gesamte Leine ist ca. 4 m (= 3,98 m) lang.

15 $h_2 = 12\,\text{cm}$
Der Kegel muss in einer Höhe von 12 cm abgeschnitten werden.

16 Das Bild auf der Linse ist genauso groß wie das Urbild. Damit gilt für den Schnittpunkt F:
$\frac{b - f}{B} = \frac{f}{G}$, daraus folgt $b = \frac{f \cdot B}{G} + f = 50{,}01\,\text{mm}$ (100,02 mm)
Außerdem gilt: $\frac{b}{B} = \frac{g}{G}$, daraus folgt
$g = b \cdot \frac{G}{B} \approx 223{,}66\,\text{m}$ (447,31 m)

17 Der Baum ist dann 9 m hoch.

8 In der vorhergehenden Aufgabe 7 werden die beiden verschiedenen Bildschirmformate thematisiert. Diese werden auch der Aufgabe 8 zugrunde gelegt.
a) Hat der Monitor ein 16:9-Format, so gilt:
17 Zoll: 21,2 cm × 37,6 cm; 19 Zoll: 23,7 cm × 42,1 cm.
Hat der Monitor ein 4:3-Format, so gilt:
17 Zoll: 25,9 cm × 34,5 cm; 19 Zoll: 29 cm × 38,6 cm.
Die Länge der Bildschirmdiagonalen vergrößert sich von 17" auf 19" um 12 %, die jeweiligen Flächen um 25 %. Das ergibt Sinn, da sich die Fläche im Quadrat vergrößert: $1{,}12^2 = 1{,}2544$.
b) Das Bildformat ist 4:3.
Die Bildhöhe beträgt 32,25 cm, die Diagonale somit 53,75 cm = 21".

Seite 133

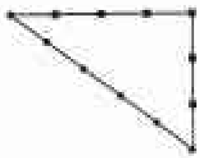
9 a) $100^2 - 80^2 = 60^2$; Leas Drachen fliegt also 60 m hoch bzw. 60 m über ihr.
b) Natürlich kann Lea immer noch direkt unter dem Drachen stehen, allerdings ist er weniger als 60 m über ihr. Der Drachen kann auch immer noch in 60 m Höhe sein, dann befindet er sich aber näher bei Simon.

10 $\sqrt{650^2 + 2000^2} \approx 2103$; das Halteseil ist mindestens 2103 m lang.

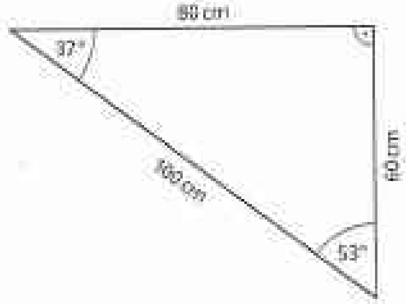
11 Die Höhe muss mindestens 3,5 m betragen, der Radius der Tunnelröhre ist 4,5 m. Es gilt:
$\sqrt{4{,}5^2 - 3{,}5^2} = 2{,}83$, d.h. in einer Tunnelhöhe von 3,5 m sind zur Fahrbahnmitte ca. 2,83 m Platz. Der Schwertransporter könnte knappe 30 cm nach rechts ausweichen, ohne an die Tunnelwand zu stoßen. Dies ist ziemlich wenig, zumal es immer zu leichten Lenkbewegungen kommt und der LKW dann entweder sehr nahe an die Wand oder auf die Gegenfahrbahn gerät. Deshalb sollte der Tunnel besser gesperrt werden.

Alles im rechten Winkel

- Es gilt: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Die Seilspanner konnten also mit 3 + 4 + 5 = 12 Knoten in regelmäßigen Abständen rechte Winkel messen und festlegen.
- Die Seilspanner legten die Seile, wie im Bild rechts dargestellt:



So konnten sie sehr genau rechteckige oder quadratische Felder abmessen und festlegen.
- Heutige Handwerker gehen genauso vor, um zu überprüfen, ob z.B. Beete oder Räume rechtwinklig sind. Auf dem Bild muss die Diagonale zwischen den 80-cm- und 60-cm-Längen 1 m sein, sonst handelt es sich nicht um einen rechten Winkel.



- individuelle Lösung
- individuelle Lösung
- $a^2 - b^2 = c^2$; $c = \sqrt{c^2}$

Üben • Anwenden • Nachdenken

Seite 135

1 Nein, die Antwort reicht nicht aus. Sina muss dabei sagen, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handeln und c dessen Hypotenuse sein muss.

2 a) $y \approx 9{,}2$ cm   b) $y \approx 11{,}2$ cm

3 a) Die 4-cm-Angabe meint die eingezeichnete Höhe; damit folgt: $x \approx 4{,}73$.
b) $x \approx 28{,}3$ cm

4 a) $u = (5 + 7{,}2 + 13{,}7 + 8{,}2)\,\text{cm} = 34{,}1\,\text{cm}$
$A = (36 + 16{,}25)\,\text{cm}^2 = 52{,}25\,\text{cm}^2$
b) $u = (11 + 9{,}8 + 13{,}6 + 5{,}7)\,\text{cm} = 40{,}1\,\text{cm}$
$A = (53{,}9 + 38{,}76)\,\text{cm}^2 = 92{,}66\,\text{cm}^2$

5 $u = (3{,}1 + 5 + 5{,}7 + 4{,}2)\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$
$A = (4{,}32 + 7{,}52 + 3{,}76 + 2{,}16)\,\text{cm}^2 = 17{,}76\,\text{cm}^2$

6 $A = (22{,}75 + 23{,}37 + 11{,}025 + 14{,}555)\,\text{cm}^2$
$= 71{,}7\,\text{cm}^2$

7 a) $\sqrt{6{,}3^2 + 8{,}2^2} \approx 10{,}3$; der Strohhalm ist also etwa 10 cm lang oder ein wenig kürzer, da er nicht ganz bis zum Rand geht.
b) Berechnung der Raumdiagonalen:
$\sqrt{10{,}3^2 + 4{,}2^2} \approx 11{,}1$; er müsste mindestens 11,1 cm lang sein. Dies aber nur unter der Voraussetzung, dass das Einsteckloch ganz am Rand der Verpackung ist. Je nachdem, wo sich das Loch befindet, reicht auch eine kürzere Länge.