7 $(24 - x)(32 - x) = 24 \cdot 32 - 460$; $x_1 = 10$ und $x_2 = 46$

8 a) $x = 1\,m : G = 11\,m^2$
$x = 2\,m : G = 20\,m^2$
$x = 3\,m : G = 27\,m^2$
b) $G = x \cdot (12 - x)$

9 $a(a + 6\,cm) = 1216\,cm^2$; $a = 32\,cm$. Das Rechteck ist 32m breit und 38m lang.

10 $(x + 3\,m)(x - 1\,m) = 21\,m^2$; $x = 4\,m$

11 Seitenlänge der Tischplatte: 1m
Seitenlängen des Rechtecks: $t + x$ und $t - x$
a) $t^2 - x^2 = 0{,}96$
$x_1 = 0{,}2$ und $x_2 = -0{,}2$ (entfällt)
b) $A_Q - A_R = 1^2 - (1^2 - x^2) = x^2$

12 $4x(x + 5\,cm) + 2x^2 = 1650\,cm^2$; $x = 15\,cm$
$V = 15\,cm \cdot 15\,cm \cdot 20\,cm = 4500\,cm^3$

13 a) $(20 - 2x)^2 = \frac{400}{2}$; $x = 10 - 5\sqrt{2}$
$V = (20 - 2(10 - 5\sqrt{2})) \cdot (20 - 2(10 - 5\sqrt{2}))$
$\cdot (10 - 5\sqrt{2}) = (10\sqrt{2}) \cdot (10\sqrt{2}) \cdot (10 - 5\sqrt{2})$
$= 2000 - 1000\sqrt{2} \approx 585\,cm^3$
b) a: Seitenlänge des inneren Quadrates.
$a^2 = 200\,cm^2$; $a = 10\sqrt{2}$; $V = a \cdot a \cdot \frac{20\,cm - a}{2}$
$= 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{20\,cm - 10\sqrt{2}}{2} = 2000 - 1000\sqrt{2}$
$\approx 585\,cm^3$. Der zweite Lösungsweg ist weniger aufwändig.

Randspalte
$400\,cm^2 - 4x^2 = 200\,cm^2$; $x = 5\sqrt{2}$. Sonja muss die Schere an den Blattkanten jeweils bei 7,1cm und bei 12,9cm ansetzen.

Technische Anwendungen

- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$; $x = 10$
Die erste Pumpe hätte den Kellerraum alleine in 10 Stunden, die zweite Pumpe in 15 Stunden geleert.
- Die zweite Pumpe benötigt alleine 8 Stunden und die dritte Pumpe alleine 24 Stunden. Insgesamt wurden 21600000 Liter (= 216000hl) Wasser abgepumpt. Die zweite Pumpe hat damit eine Leistung von 45000 Liter pro Minute, die dritte Pumpe eine Leistung von 15000 Liter pro Minute.
- $\frac{500}{x} + 1{,}5 = \frac{500}{x - 40}$; $x \approx 137{,}2$. Der ICE fährt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von ungefähr 137km/h, der IC hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa 97km/h.
- $\frac{300}{x - 35} - \frac{20}{60} = \frac{300}{x - 50} - \frac{30}{60}$; $x \approx 207$. Der ICE fährt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von ungefähr 207km/h, der EC fährt durchschnittlich 172km/h und der IC durchschnittlich 157km/h.
- Die Strecke Frankfurt–Paris wurde bisher mit durchschnittlich 107km/h zurückgelegt, ab 2007 hat sich die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 149km/h erhöht.

Üben • Anwenden • Nachdenken

Seite 38

1 a) $L = \{-3; 3\}$
b) $L = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
c) $L = \{-26; 4\}$
d) $L = \{-7; 7\}$

2 a) $L = \{-5; 3\}$
b) $L = \{-5; 7\}$
c) $L = \{-1\}$
d) $L = \{-3; 1\}$

3 $(3x - 2)^2 = 3(x - 2)^2 - 2$
$(4x - 3)^2 = 4(x - 3)^2 - 15$
$(5x - 4)^2 = 5(x - 4)^2 - 44$
$(6x - 5)^2 = 6(x - 5)^2 - 95$
Für alle Gleichungen gilt $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

4 a) $L = \{1\}$
b) $L = \{-1; 2\}$
c) $L = \{-2; 4\}$

5 a) $L = \{-4; -3\}$
b) keine Lösung
c) keine Lösung
d) $L = \{0\}$
e) $L = \{-0{,}5; 2\}$

6 a) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$
b) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$
c) $x_1 = 0$; $x_2 = 5$
d) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2}$
e) $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{7}{2}$
f) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$

7 a) $x^2 + 2x - 63 = 0$
b) $x^2 - 5x - 14 = 0$
c) $x^2 + 3x = 0$
d) $x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{27} = 0$

8 Der Computer „streikt" bei der Aufgabe b), da hier die Diskriminante negativ wird. Die Lösungsmenge ist leer.

Quadratisches ?!

- $x = 3$: Die drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen sind die Zahlen 3, 4 und 5.
- $x = 10$
- Gesucht werden n aufeinander folgende natürliche Zahlen, wobei n ungerade ist, sodass die Summe der Quadrate der ersten $\frac{n+1}{2}$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der noch übrigen $\frac{n-1}{2}$ Zahlen ist. Die erste Zahl ist das Produkt aus der Gesamtzahl n und der Anzahl der auf der rechten Seite stehenden Zahlen $\frac{n-1}{2}$, also $n \cdot \frac{n-1}{2}$. Sucht man also 13 aufeinander folgende natürliche Zahlen, wobei die Summe der ersten 7 Quadratzahlen gleich der Summe der letzten 6 Quadratzahlen ist, so ist die erste Zahl dieser Folge $13 \cdot \frac{13-1}{2} = 78$: $78^2 + 79^2 + 80^2 + 81^2 + 82^2 + 83^2 + 84^2 = 85^2 + 86^2 + 87^2 + 88^2 + 89^2 + 90^2$

Seite 39

9 $n(n+1) - 239 = n + (n+1)$; $n = 16$

10 $(n-11)^2 + n^2 = 745$; $n = 24$

11 a) Reaktionsweg und Bremsweg sind bei einer Geschwindigkeit von $30\,\frac{km}{h}$ gleich lang, der Anhalteweg ist 18 m lang.

b) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{v}{10} \Longrightarrow v = 60\,\frac{km}{h}$

$\left(\frac{v}{10}\right)^2 = 3 \cdot 3 \cdot \frac{v}{10} \Longrightarrow v = 90\,\frac{km}{h}$

$\left(\frac{v}{10}\right)^2 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{v}{10} \Longrightarrow v = 120\,\frac{km}{h}$

12 a) $(2x+1)x + x^2 = 200$; $x = 8\,m$

b) $x^2 + 8(x + 2{,}5) = 200$; $x = 10\,m$

13 a) $x^2 = (x+6) \cdot 3$; $x = 6\,m$

b) $x(x+2) = (x-1) \cdot 8$; $x_1 = 2\,m$; $x_2 = 4\,m$

Hochgradige Gleichungen

- $L = \{3; -3; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

$L = \{3; -3\}$

$L = \{\ \}$
- Eine Gleichung vierten Grades hat höchstens 4 Lösungen.
- $L = \{0; 1; 8\}$

$L = \{0\}$

$L = \{-5; 0; 2\}$
- Eine Gleichung dritten Grades hat höchstens drei Lösungen. Die Null ist immer in der Lösungsmenge enthalten.
- Vermutung: Eine Gleichung n-ten Grades hat höchstens n Lösungen.

Seite 40

14 a) Der Term $2x(10\,m + x) + x \cdot 15\,m$ gibt die Größe der zu pflasternden Umrandung in Quadratmetern an.

b) $2x(10\,m + x) + x \cdot 15\,m = 123\,m^2$; $x = 3\,m$

Das Geld reicht für eine genau 3 m breite Umrandung des Schwimmbeckens aus.

15 $2a + 2b = 134\,cm \Longrightarrow b = 67\,cm - a$

$a \cdot b = 1050\,cm^2 \Longrightarrow a \cdot (67\,cm - a) = 1050\,cm^2$

$a = 42\,cm$, $b = 25\,cm$. Das Rechteck ist 42 cm lang und 25 cm breit.

16 $(a + 18) \cdot a = 144$; $a = 6$

$U = 2 \cdot 6\,cm + 2 \cdot 24\,cm = 60\,cm^2$

17 $\frac{g \cdot (g-1)}{2} = 36$; $g = 9$. Die Grundseite des Dreiecks ist 9 cm, die Höhe 8 cm lang.

18 $2ab \cdot 2bc + 2ac = 286$; $a = 7$, $b = 7 + x$, $c = 7 - x$

$2 \cdot 7(7+x) + 2(7+x)(7-x) + 2 \cdot 7(7-x) = 286$;

$x = 2$

$V = 7\,cm \cdot 9\,cm \cdot 5\,cm = 315\,cm^3$

19 a) $x \cdot 5\,m + x \cdot 3\,m - x^2 = \frac{15}{4}\,m^2$; $x^1 = 0{,}5$ ($x_2 = 7{,}5$).

Der Streifen wird 0,5 m breit.

b) $1\,m \cdot a + 1\,m \cdot b - 1\,m^2 = \frac{ab}{4}$, wobei $b = \frac{5}{3}a$

$a + \frac{5}{3}a - 1 = \left(\frac{\frac{5}{3}a^2}{4}\right)$; $a_1 = 6$ ($a_2 = 0{,}4$)

Die Flagge hat eine Größe von 6 m auf 10 m.

20 x: Anzahl der Affen in der Herde

$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$; $x_1 = 48$ und $x_2 = 16$

Die Herde besteht entweder aus 16 oder aus 48 Affen.

21 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{15}$

Pumpe 1: 27,5 Stunden

Pumpe 2: 55 Stunden

22 $V_J = \frac{s}{t_M - 1{,}5}$;

$V_M = V_J - 3 = \frac{s}{t_M}$;

$-3t^2 + 4{,}5t + 135 = 0$

Juliane benötigt 7,5 Stunden $\left(15\,\frac{km}{h}\right)$,

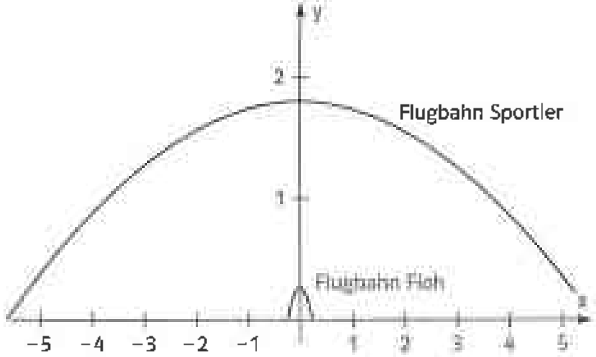
Marion 6 Stunden $\left(12\,\frac{km}{h}\right)$.

23 $x^2 - \frac{67}{19}x - \frac{1440}{19} = 0$

Die 1200 Erwachsenen zahlen je 12 Euro Eintritt, die 320 Jugendlichen je 5 Euro.

7 a) Die Sprunghöhe entspricht dem y-Wert des Scheitelpunkts. Dieser liegt bei $S(0\,|\,2{,}4)$. Der Hochspringer kann also 2,40 m hoch springen.
b) Der Körperschwerpunkt liegt etwa auf Hüfthöhe $\approx 1\,\text{m}$.
Lösen der Gleichung: $-0{,}18x^2 + 2{,}4 = 1 \Longrightarrow x^2 \approx 7{,}8$ $\Longrightarrow x_1 \approx 2{,}79$ und $x_2 \approx -2{,}79$. Er sollte also abspringen, wenn er etwa 2,79 m von der Latte entfernt ist.

8 a) Bestimmung des Absprungs mit $1 = -\frac{2}{35} \cdot x^2 + 1{,}8$ ergibt 3,74 m. Höhe des Körperschwerpunkts: Zu lösen ist die Gleichung $1{,}5 = -\frac{2}{35} \cdot x^2 + 1{,}8$.
Es ergeben sich die Lösungen $x_1 = 2{,}29$ und $x_2 = -2{,}29$. Die Entfernung betrug also 3,74 m − 2,29 m = 1,45 m vom Absprungspunkt.
b) Die maximale Höhe ist am Scheitelpunkt erreicht. Dort hat er eine Höhe von 1,80 m erreicht.
c) Nimmt man die Breite des Pkw mit 2 m an, so muss man die Sprunghöhe an der Stelle $x = -1$ bestimmen. Diese ist $y = -\frac{2}{35}(-1)^2 + 1{,}8 \approx 1{,}74\,\text{m}$.
Er hätte also über einen Pkw springen können.
d) Ein Floh springt im Verhältnis gesehen noch deutlich höher!



e) Berechnet man die Sprungweite aus der Funktionsgleichung, so erhält man sie als Abstand der Nullstelle $x_1 = -5{,}6$ und dem Absprungpunkt bei 3,74, also etwa 9,34 m.

Üben • Anwenden • Nachdenken

Seite 60

1 a) A liegt auf der Normalparabel, da $17^2 = 289$.
b) B liegt unter der Normalparabel, da $(-4)^2 = 16 > -16$.
c) C liegt unter der Normalparabel, da $4{,}5^2 = 20{,}25 > 20$.
d) D liegt auf der Normalparabel, da $(-3{,}5)^2 = 12{,}25$.
e) E liegt unter der Normalparabel, da $1{,}1^2 = 1{,}21 > 1{,}2$.
f) F liegt über der Normalparabel, da $0{,}2^2 = 0{,}04 < 0{,}4$.

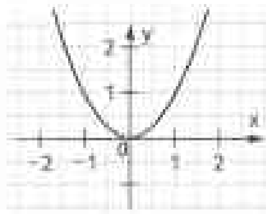
2

x	1,5	+2,3	4,6	−2,0	0,7	+3,3	−3,7
y	2,3	5,2	21,2	3,9	0,5	11,2	13,5

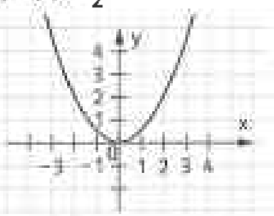
3 a) Normalparabel um 2,5 nach unten verschoben
Spiegelung an der x-Achse: $f(x) = -x^2 + 2{,}5$
Spiegelung an der y-Achse: $f(x) = x^2 - 2{,}5$
b) breiter als Normalparabel, um 1,5 nach unten verschoben
Spiegelung an der x-Achse: $f(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5$
Spiegelung an der y-Achse: $f(x) = 0{,}5x^2 - 1{,}5$
c) Normalparabel um 2,5 nach links verschoben
Spiegelung an der x-Achse: $f(x) = -(x + 2{,}5)^2$
Spiegelung an der y-Achse: $f(x) = (x - 2{,}5)^2$
d) Normalparabel um 2 nach links und um 1 nach oben verschoben
Spiegelung an der x-Achse: $f(x) = -(x + 2)^2 - 1$
Spiegelung an der y-Achse: $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

4 von links nach rechts: $f(x) = x^2$; $f(x) = 1{,}5x^2$; $f(x) = 0{,}5x^2$

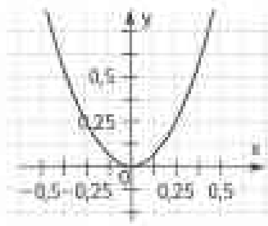
5 a) $f(x) = x^2$



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$



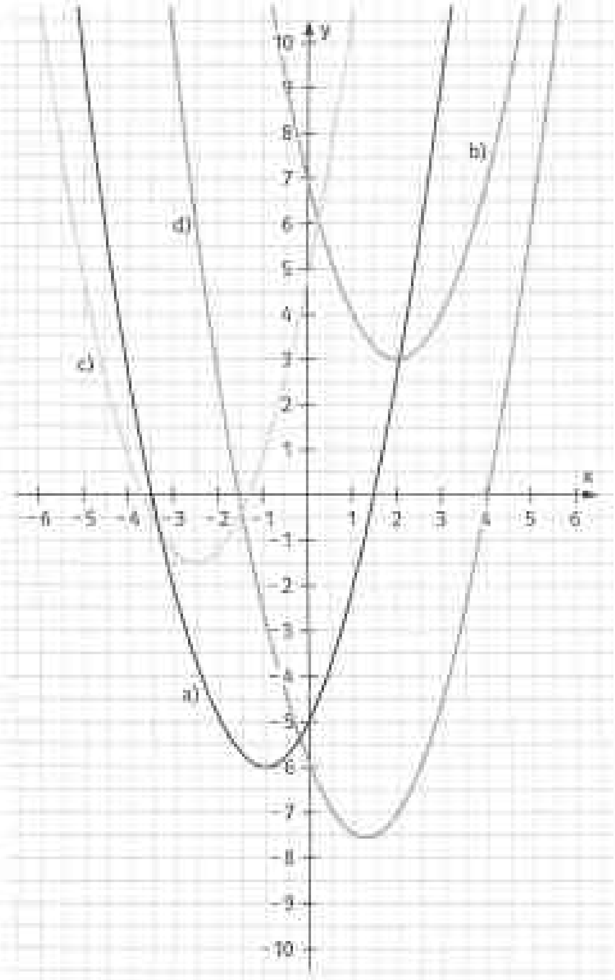
c) $f(x) = 4x^2$



6 a) $P(0\,|\,3)$; $Q_1(-2\,|\,7)$; $Q_2(2\,|\,7)$
b) $P(0\,|\,0)$; $Q_1(-3\,|\,4{,}5)$; $Q_2(3\,|\,4{,}5)$
c) $P(0\,|\,2)$; $Q_1(-1{,}91\,|\,-9)$; $Q_2(1{,}91\,|\,-9)$

7 a) Normalparabel, nach oben geöffnet; $S(-2\,|\,1)$; um 2 nach links und 1 nach oben verschoben; kein Schnittpunkt mit der x-Achse
b) Normalparabel, nach oben geöffnet; $S(3\,|\,3)$; um 3 nach rechts und 3 nach oben verschoben; kein Schnittpunkt mit der x-Achse
c) Normalparabel, nach unten geöffnet; $S(0\,|\,-2{,}5)$; um 2,5 nach unten verschoben; kein Schnittpunkt mit der x-Achse
d) Normalparabel, nach oben geöffnet; $S(-2{,}5\,|\,0)$; um 2,5 nach links verschoben; Scheitel liegt auf der x-Achse.

8 a) $f(x) = (x + 1)^2 - 6$
b) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$
c) $f(x) = (x + 2{,}5)^2 - 1{,}5$
d) $f(x) = (x - 1{,}25)^2 - 7{,}5625$



9 (A) $f(x) = (x + 1{,}5)^2 + 1{,}5$; keine Nullstellen
(B) $f(x) = -(x + 2)^2$; $x = -2$
(C) $f(x) = -x^2 + 2$; $x_1 \approx -1{,}41$; $x_2 \approx 1{,}41$
(D) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$
(E) $f(x) = (x + 0{,}5)^2 - 1$; $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 0{,}5$

10

	Schnittpunkte mit	
	x-Achse	y-Achse
a) $f(x) = x^2 - 1$	$(-1\vert 0)$; $(1\vert 0)$	$(0\vert -1)$
b) $f(x) = -x^2 + 4$	$(-2\vert 0)$; $(2\vert 0)$	$(0\vert 4)$
c) $f(x) = (x - 2)^2$	$(2\vert 0)$	$(0\vert 4)$
d) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$	$(-2\vert 0)$; $(2\vert 0)$	$(0\vert -2)$
e) $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$	$(4\vert 0)$	$(0\vert 16)$
f) $f(x) = x^2 + 5x + 6{,}25 = (x + 2{,}5)^2$	$(-2{,}5\vert 0)$	$(0\vert 6{,}25)$

11 a) Zu lösen ist die Gleichung $x^2 + 2x + q = 0$.
Daraus folgt $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - q}$.
Es gibt zwei Lösungen, wenn $1 - q > 0$, d.h. $q < 1$ ist;
es gibt eine Lösung, wenn $q = 1$ ist;
es gibt keine Lösung, wenn $1 - q < 0$, d.h. $q > 1$ ist.
b) Zu lösen ist die Gleichung $x^2 + px + 4 = 0$.
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4}$.
Es gibt zwei Lösungen, wenn $\frac{p^2}{4} - 4 > 0$, d.h. wenn $p > 4$ oder $p < -4$ ist;
es gibt eine Lösung, wenn $\frac{p^2}{4} - 4 = 0$, d.h. wenn $p = 4$ oder $p = -4$ ist;
es gibt keine Lösung, wenn $\frac{p^2}{4} - 4 < 0$, d.h. wenn $-4 < p < 4$ ist.

Seite 61

12 a) mögliche Lösungen:
$f(x) = (x - 2)^2$; $f(x) = 2(x - 2)^2$; $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2$
b) mögliche Lösungen:
$f(x) = (x + 5)(x - 1)$; $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 2{,}5$;
$f(x) = -2x^2 - 8x + 10$

13 a) $f(x) = (x - 1{,}5)^2 - 2{,}25$
b) $f(x) = (x + 4)^2 - 4$
c) $f(x) = (x + 0{,}5)^2 - 6{,}25$

14 Einsetzen der Punkte liefert $y = x^2 - 7x + 6 = (x - 3{,}5)^2 - 6{,}25$; $S(3{,}5\,|\,-6{,}25)$.

15 a) Das Einsetzen von $P(-1\,|\,7{,}5)$ liefert $p = -4$.
$f(x) = (x - 2)^2 - 1{,}5$; $S(2\,|\,-1{,}5)$
b) $f(x) = (x - 1)^2 - 3$; $S(1\,|\,-3)$
c) $f(x) = (x + 1{,}5)^2 + 1{,}75$; $S(-1{,}5\,|\,1{,}75)$
d) $f(x) = (x - 2{,}5)^2 - 12{,}5$; $S(2{,}5\,|\,-12{,}5)$

16 a) Ansatz: $y = ax^2 + c$
Einsetzen von $P(0\,|\,52)$ und $Q(-15\,|\,0)$ in $y = ax^2 + c$ liefert $y = -\frac{52}{225}x^2 + 52$.
b) Die Nullstellen liegen bei $x_1 = -15$ und $x_2 = 15$.
Höhe von 30 m: $30 = -\frac{52}{225}x^2 + 52 \Longrightarrow x_1 \approx 9{,}8$ oder $x_2 \approx -9{,}8$. Die Rakete erreicht die Höhe von 30 m knapp 10 m vor dem höchsten Punkt, also nach etwa 15 m − 10 m = 5 m horizontaler Flugstrecke.
c) individuelle Lösung