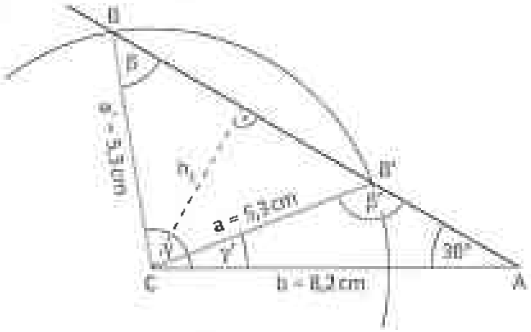
Üben • Anwenden • Nachdenken

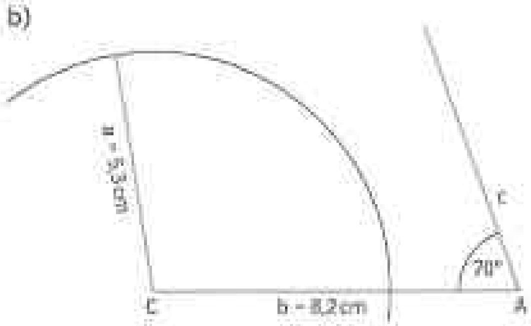
Seite 133

1 a) $c = 8{,}02\,cm$; $a = 6{,}19\,cm$; $\alpha = 50{,}5°$
b) $h_a = 4{,}14\,cm$; $a_2 = 2{,}63\,cm$; $a_1 = 5{,}17\,cm$;
$\beta = 38{,}69°$; $\alpha = 83{,}71°$; $c = 6{,}62\,cm$
c) $\gamma = 46{,}1°$; $h_b = 3{,}22\,cm$; $b_2 = 7{,}43\,cm$; $a = 4{,}47\,cm$;
$b_1 = 3{,}10\,cm$; $b = 10{,}53\,cm$
d) $a_1 = 2{,}36\,cm$; $h_a = 5{,}62\,cm$; $\gamma = 51{,}31°$; $\alpha = 61{,}49°$;
$a_2 = 4{,}50\,cm$; $a = 6{,}86\,cm$
e) $\gamma = 90°$; $c = 8{,}85\,cm$; $b = 7{,}01\,cm$

2 a)



$h_c = 4{,}1\,cm$; $c_1 = 7{,}1\,cm$;
(1) Dreieck ABC: $\beta = 50{,}68°$; $c_2 = 3{,}36\,cm$;
$c = 10{,}46\,cm$; $\gamma = 99{,}32°$
(2) Dreieck AB'C: $\beta' = 129{,}32°$; $c'_2 = -3{,}36\,cm$;
$c' = 3{,}74\,cm$; $\gamma' = 20{,}68°$.
b)



Man erhält keinen Schnittpunkt für B.
Es entsteht kein Dreieck.

3 $A = 30\,cm^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}2\,cm \cdot c \cdot \sin 67{,}0°$; $c = 7{,}95\,cm$

4 a) $A = 8{,}75\,cm^2$
b) Man sucht einen Winkel α, für den gilt
$\sin 30° = \sin\alpha$. $\alpha = 150°$

5 a) Dreieck links, dritte Seite s: $s = e$.
Dreieck rechts, Teilstrecke von $\overline{AB}$ g: $g = \sqrt{3} \cdot e$
Es gilt also: $\overline{AB} = e + 2e + \sqrt{3} \cdot e = e(3 + \sqrt{3})$
Fläche des Trapezes:
$A = \frac{1}{2} \cdot (2e + e(3 + \sqrt{3})) \cdot e = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \cdot e^2$
b) $e \approx 6\,cm$

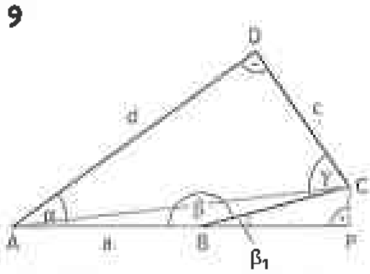
6 $y = e$; $\tan 30° = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{y}{y + x}$; $x = e \cdot (\sqrt{3} - 1)$

7 oberer Quader:
d Diagonale im unteren Rechteck, e Raumdiagonale
$c = 6\,cm$; $d = \sqrt{64 + 100} = 12{,}8\,cm$;
$e = \sqrt{36 + 12{,}8^2} = 14{,}14\,cm$
Winkel links unten $\alpha = 90°$; Winkel links oben β:
$\tan\beta = \frac{d}{c}$; $\beta = 64{,}89°$; $\gamma = 25{,}11°$
mittlerer Quader:
d Diagonale im vorderen Rechteck, e Raumdiagonale
$b = 10\,cm$; $d = \sqrt{64 + 36} = 10\,cm$;
$e = \sqrt{100 + 100} = 14{,}14\,cm$

Winkel links oben $\alpha = 90°$; Winkel rechts unten β:
$\tan\beta = \frac{b}{d}$; $\beta = 45°$; $\gamma = 45°$
unterer Quader:
d Diagonale im rechten Rechteck, e Raumdiagonale
$a = 8\,cm$; $d = \sqrt{100 + 36} = 11{,}66\,cm$;
$e = \sqrt{64 + 11{,}66^2} = 14{,}14\,cm$
Winkel rechts unten $\alpha = 90°$; Winkel rechts oben β:
$\tan\beta = \frac{a}{d}$; $\beta = 34{,}45°$; $\gamma = 55{,}55°$

8 a) Im Parallelogramm ist $h_a = 5\,cm \cdot \sin\alpha$.
$A_R = 10\,cm \cdot 5\,cm = 50\,cm^2$
$A_P = 25\,cm^2 = 10\,cm \cdot h_a = 10\,cm \cdot 5\,cm \cdot \sin\alpha$; $\alpha = 30°$
oder $\alpha = 150°$
b) $A_P = 10\,cm \cdot h_a = 10\,cm \cdot 5\,cm \cdot \sin 45° = 35{,}36\,cm^2$
$\frac{A_R}{A_P} = \frac{50\,cm^2}{35{,}36\,cm^2} = 1{,}41$; also ist A_R 41 % größer.
c) $A_P = 10\,cm \cdot h_a = 10\,cm \cdot 5\,cm \cdot \sin 1° = 0{,}87\,cm^2$
$\frac{A_P}{A_R} = \frac{0{,}87\,cm^2}{50\,cm^2} = 0{,}017$; also nimmt A_P 1,7 % der Fläche
von A_R ein.

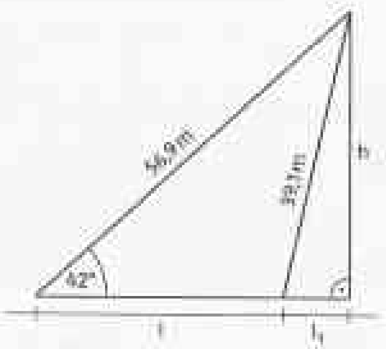
9



Die Höhe durch C auf die Seite a schneidet ihre Verlängerung in P. Man berechnet zuerst das Dreieck BPC.

$\beta_1 = 14{,}7°$; $\overline{BP} = 3{,}97\,cm$; $\overline{PC} = 1{,}04\,cm$;
$A_{BPC} = 2{,}06\,cm^2$
Man berechnet nun $\overline{AC}$: $\overline{AC} = \sqrt{c^2 + d^2} = 9{,}13\,cm$
$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2} = 9{,}07\,cm$;
$A_{APC} = 0{,}5 \cdot 9{,}07\,cm \cdot 1{,}04\,cm = 4{,}72\,cm^2$
$A_{ACD} = 0{,}5 \cdot c \cdot d = 17{,}6\,cm^2$
$A_{ABCD} = A_{ACD} + A_{APC} - A_{BPC} = 20{,}26\,cm^2$

Ein günstiger Kauf?



$h = 56{,}9\,m \cdot \sin 42° = 38{,}07\,m$;
$l + l_1 = 56{,}9\,m \cdot \cos 42° = 42{,}28\,m$;
$l_1 = \sqrt{39{,}1^2 - 38{,}07^2} = 8{,}92\,m$; $l = 33{,}6\,m$
$A = 0{,}5 \cdot l \cdot h = 635\,m^2$

Trixi hat sich verrechnet. Das Grundstück ist sogar ein bisschen kleiner als angegeben. Trixi hat vermutlich bei der Rechnung die Längen $l + l_1$ und l_1 addiert, statt zu subtrahieren.

Seite 134

10 Stühle kippen über die Linie, die die Füße verbindet (Abstand a). Als Maß ist deshalb das Verhältnis von Abstand zu Beinlänge l geeignet.
Ist der Winkel zwischen den Beinen α, dann gilt $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{l}$
3 Beine; $\alpha = 120°$; $\cos 60° = 0{,}5$
4 Beine; $\alpha = 90°$; $\cos 45° = 0{,}71$
5 Beine; $\alpha = 72°$; $\cos 36° = 0{,}81$
6 Beine; $\alpha = 60°$; $\cos 30° = 0{,}87$
Je höher der Wert für den Kosinus ist, desto höher ist die Standsicherheit.

11 Es ist $\frac{b}{c} = \sin\alpha$.
a) $\sin 60° = 0{,}87 = 87\%$; $\sin 45° = 0{,}71 = 71\%$; $\sin 30° = 0{,}5 = 50\%$; $\sin 15° = 0{,}26 = 26\%$; $\sin 10° = 0{,}17\%$.
b) Bei einem Winkel $\alpha > 50°$ hat man immer noch eine Strahlungsintensität von über 75%, was sicher noch effektiv ist. Der Einfallswinkel und der Neigungswinkel β sollten für nahezu alle Winkel, unter denen die Sonnenstrahlung einfällt, eine hohe Strahlungsintensität ergeben.
Das bedeutet, dass $\alpha + \beta > 50°$ sein soll; $\alpha + \beta$ darf andererseits nicht viel größer als 110° werden, da das Solarmodul die Strahlung sonst auch nicht gut verwerten kann. β sollte also etwa 30° sein.
c) Wählt man $\beta = 35°$, dann erhält man eine effektive Strahlungsintensität eines Einfallswinkels von $35° + 39° = 74°$ für März;
97° für Juni; 74° für September; 50° für Dezember.
Man erhält also für das ganze Jahr eine Strahlungsintensität, die nicht unter 75% liegt.

12 a) $h = 80\,m \cdot \tan\alpha$

α	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
h_1 in m	28,3	45,3	65,9	93,7	135,8	214,0	413,6
h in m	29,1	46,2	67,1	95,3	138,6	219,8	453,7
h_2 in m	29,9	47,1	68,3	97,0	141,4	225,9	478,1

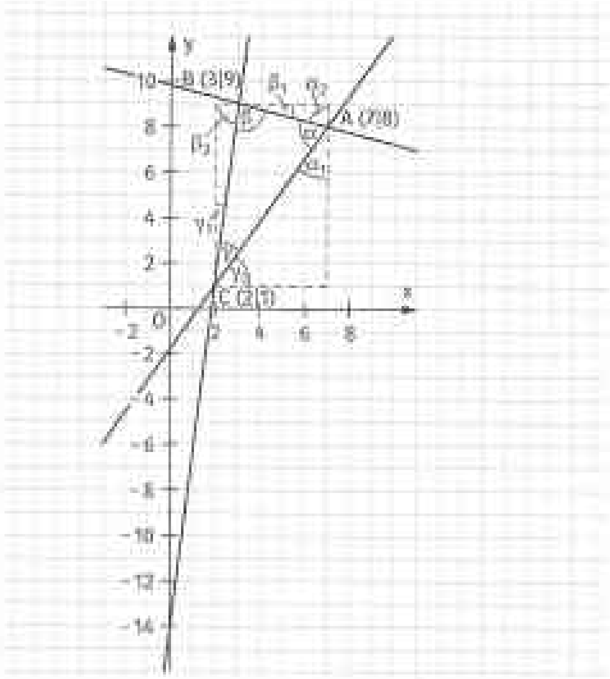
b) $h = 80\,m \cdot \tan\alpha$; $h_1 = 79{,}95\,m \cdot \tan\alpha$,
$h_2 = 80{,}05\,m \cdot \tan\alpha$

α	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
h_1 in m	29,1	46,2	67,1	95,3	138,5	219,7	453,4
h in m	29,1	46,2	67,1	95,3	138,6	219,8	453,7
h_2 in m	29,1	46,2	67,2	95,4	138,7	219,9	454,0

c) geringste Höhe für $h_1 = 102{,}5 \cdot \tan 60° = 177{,}54\,m$;
höchste Höhe für $h_2 = 103{,}5 \cdot \tan 62° = 194{,}66\,m$

Seite 135

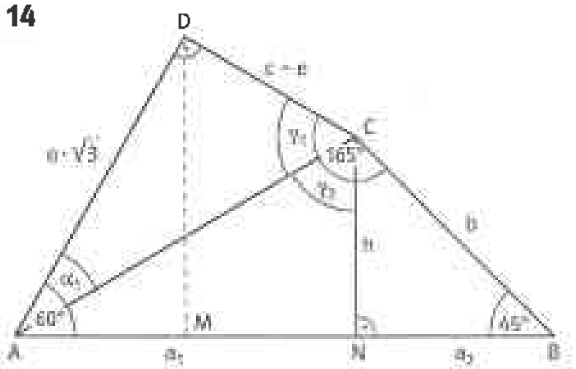
13 a) Durch das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren berechnet man die Schnittpunkte von g mit h: A(7|8); h mit i: B(3|9); g mit i: C(2|1).



Man bestimmt die Differenzen der x- bzw. y-Werte. Diese sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Seite zwischen den Punkten ist.
$a = \sqrt{(3-2)^2 + (9-1)^2} = 8{,}06\,cm$
$b = \sqrt{(7-2)^2 + (8-1)^2} = 8{,}60\,cm$
$c = \sqrt{(7-3)^2 + (8-9)^2} = 4{,}12\,cm$
Man ergänzt außen drei Dreiecke, bestimmt ihre Winkel und Flächen und daraus die Winkel und die Fläche des Dreiecks ABC.
Aus $\tan\alpha_1 = \frac{5}{7}$ folgt $\alpha_1 = 35{,}54°$
$\gamma_2 = 90° - \alpha_1 = 90° - 35{,}54° = 54{,}40°$

$A_1 = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 7 = 17{,}5\,cm^2$;
Aus $\tan\beta_1 = \frac{1}{4}$ folgt $\beta_1 = 14{,}04°$
$\alpha_2 = 90° - \beta_1 = 90° - 14{,}04° = 75{,}96°$
$A_2 = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 4 = 2\,cm^2$;
Aus $\tan\gamma_1 = \frac{1}{8}$ folgt $\gamma_1 = 7{,}13°$
$\beta_2 = 90° - \gamma_1 = 90° - 7{,}13° = 82{,}87°$
$A_3 = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 8 = 4\,cm^2$;
$\gamma = 90° - \gamma_1 - \gamma_2 = 28{,}41°$;
$\beta = 180° - \beta_1 - \beta_2 = 83{,}09°$;
$\alpha = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 = 68{,}5°$
$A = 5 \cdot 8 - A_1 - A_2 - A_3 = 16{,}5\,cm^2$
b) $A\left(\frac{12}{7}\middle|\frac{6}{7}\right)$; $B\left(\frac{6}{11}\middle|\frac{18}{11}\right)$; $C(0|0)$

14



Es gilt: $\delta = 90°$;
Aus dem Dreieck ACD und da $c = e$ folgt
$\alpha_1 = 30°$ und $\gamma_1 = 60°$.
Somit ist auch $\gamma_2 = 60°$ und es gilt: $h = e$;
$a_1 = e\sqrt{3}$ (da die Dreiecke ACD und ANC kongruent sind).
Das rechtwinklige Dreieck BCN hat einen 45°-Winkel, ist also gleichschenklig $a_2 = h = e$; $b = e \cdot \sqrt{2}$
$a = a_1 + a_2 = e\sqrt{3} + e = e(\sqrt{3} + 1)$
Somit ist $u = a + b + c + e\sqrt{3} = e(\sqrt{3} + 1) + e\sqrt{2} + e + e\sqrt{3} = e(2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{2})$

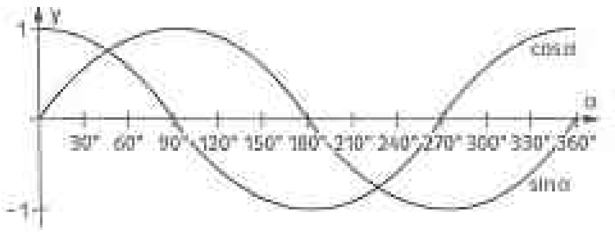
15 a) $\frac{\overline{HG}}{2} = f \cdot \sin\frac{\psi}{2}$; $\overline{HG} = a = 18\,cm$
$c = f \cdot \sin\psi = 12\,cm$; $\overline{MC} = f \cdot \cos\psi = 12\,cm$
Mit dem Satz von Pythagoras: $b = 7{,}94\,cm$
b) $\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a$
$\tan\psi = \frac{a}{\overline{MC}}$; $\psi = 41{,}8°$
$\overline{MG} = \frac{3}{2} \cdot a$ (Satz von Pythagoras)
$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{MG}}$; $\varphi = 38{,}9°$

16 Im ersten Druck des Schülerbuches ist ein Fehler. Die Grundfläche beträgt a^2. Für das konkrete Beispiel beträgt $a = 10\,cm$.
Gegeben: Grundfläche a^2, Körperhohe h und Neigungswinkel α
$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}}$ $\quad h = \frac{a}{2}\tan\alpha$
$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}\tan\alpha = \frac{1}{6}a^3\tan\alpha$
Für $\alpha = 30°$ und $a = 10\,cm$: $\frac{1}{6} \cdot 1000\,cm^3 \cdot \tan 30° = 96{,}23\,cm^3$
Für $\alpha = 45°$ und $a = 10\,cm$: $\frac{1}{6} \cdot 1000\,cm^3 \cdot \tan 45° = 166{,}67\,cm^3$
Für $\alpha = 60°$ und $a = 10\,cm$: $\frac{1}{6} \cdot 1000\,cm^3 \cdot \tan 60° = 288{,}68\,cm^3$

17 $\frac{r}{6{,}6\,cm} = \tan 20°$ $\quad r = 6{,}6\,cm \cdot \tan 20° = 2{,}40\,cm$
$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}40^2 \cdot \pi \cdot 6{,}6\,cm^3 = 39{,}81\,cm^3$

18 a) $\sin 230° = -\sin 50°$ und $\sin 310° = -\sin 140°$
$\sin 50° + \sin 140° + \sin 230° + \sin 310°$
$= \sin 50° + \sin 140° - \sin 50° - \sin 140° = 0$
b) Individuelle Lösung
Z. B. $\sin 40° + \sin 150° + \sin 220° + \sin 330° = 0$
Für den Kosinus existieren ebenfalls solche Winkel
Z. B. $\cos 30° + \cos 150° + \cos 210° + \cos 330° = 0$

19



a) Für $\alpha = 45°$ und $\alpha = 225°$ hat die Sinus- und die Kosinusfunktion denselben Wert.
Für $\alpha = 135°$ und $\alpha = 315°$ hat die Sinusfunktion den entgegengesetzten Wert der Kosinusfunktion und umgekehrt.
b) Für alle Winkel zwischen 45° und 225° sind die Werte der Sinusfunktion größer als die Werte der Kosinusfunktion. Für alle Winkel zwischen 0° und 45° bzw. 225° und 360° sind die Werte der Sinusfunktion kleiner als die der Kosinusfunktion.
c) Im Intervall [0°; 90°] und [270°; 360°] steigt die Sinusfunktion. Im Intervall [90°; 270°] fällt die Sinusfunktion. Im Intervall [270; 360°] steigt sowohl die Sinus- als auch die Kosinusfunktion.

20 a) In 5 s wird $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ des Kreises durchlaufen.
Der Drehwinkel beträgt demnach $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.
$P_{5s}(\cos 120° | \sin 120°)$ $\quad P_{5s}(-0{,}5 | 0{,}866)$
b) In 1 s wird $\frac{1}{15}$ des Kreises durchlaufen.
Der Drehwinkel beträgt $\frac{1}{15} \cdot 360° = 24°$
$P_{1s}(\cos 24° | \sin 24°)$ $\quad P_{1s}(0{,}914 | 0{,}407)$
c) In 10 s wird $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ des Kreises durchlaufen.
Der Drehwinkel beträgt $\frac{2}{3} \cdot 360° = 240°$
$P_{10s}(\cos 240° | 240°)$ $\quad P_{10s}(-0{,}5 | -0{,}866)$

21 $P_1(17\,cm \cdot \cos 25° | 17\,cm \cdot \sin 25°)$
$P_2(17\,cm \cdot \cos 205° | 17\,cm \cdot \sin 205°)$
$P_1(15{,}41\,cm | 7{,}18\,cm)$
$P_2(-15{,}41\,cm | -7{,}18\,cm)$
Eine Vierteldrehung weiter sind die Winkel 90° größer.

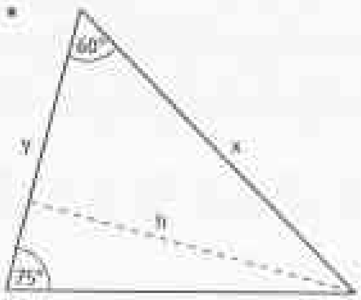
$P_1(17\,cm \cdot \cos 115° \mid 17\,cm \cdot \sin 115°)$
$P_2(17\,cm \cdot \cos 295° \mid 17\,cm \cdot \sin 295°)$
$P_1(-7{,}18\,cm \mid 15{,}41\,cm)$
$P_2(7{,}18\,cm \mid -15{,}41\,cm)$

22 a) Reihenfolge der Eckpunkte entgegen dem Uhrzeigersinn, beginnend mit dem Punkt auf der x-Achse im ersten Quadranten.
$P_1(x \cdot \cos 0°) \mid y \cdot \sin 0°)$; $P_1(x \mid 0)$
$P_2(x \cdot \cos 60° \mid y \cdot \sin 60°)$; $P_2(0{,}5x \mid 0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
$P_3(x \cdot \cos 120° \mid y \cdot \sin 120°)$; $P_3(-0{,}5x \mid 0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
$P_4(x \cdot \cos 180° \mid y \cdot \sin 180°)$; $P_4(-x \mid 0)$
$P_5(x \cdot \cos 240° \mid y \cdot \sin 240°)$; $P_5(-0{,}5x \mid -0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
$P_6(x \cdot \cos 300° \mid y \cdot \sin 300°)$; $P_6(0{,}5x \mid -0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
b) Reihenfolge der Eckpunkte entgegen dem Uhrzeigersinn, beginnend mit dem Punkt im ersten Quadranten.
$P_1(x \cdot \cos 30° \mid y \cdot \sin 30°)$; $P_1(0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid 0{,}5y)$
$P_2(x \cdot \cos 90° \mid y \cdot \sin 90°)$; $P_2(0 \mid y)$
$P_3(x \cdot \cos 150° \mid y \cdot \sin 150°)$; $P_3(-0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid 0{,}5y)$
$P_4(x \cdot \cos 210° \mid y \cdot \sin 210°)$; $P_4(-0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid -0{,}5y)$
$P_5(x \cdot \cos 270° \mid y \cdot \sin 270°)$; $P_5(0 \mid -y)$
$P_6(x \cdot \cos 330° \mid y \cdot \sin 330°)$; $P_6(0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid -0{,}5y)$

Seite 136

Arbeit sparen mit dem Sinussatz

▪

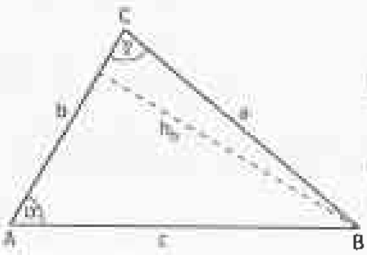


$\frac{h}{3245\,m} = \sin 75°$
$h = 3254\,m \cdot \sin 75°$
$\frac{h}{x} = \sin 60°$
$h = x \cdot \sin 60°$

$3254\,m \cdot \sin 75°$
$= x \cdot \sin 60°$
$x = \frac{3254\,m \cdot \sin 75°}{\sin 60°}$
$= 3629{,}37\,m$

Analog wird y berechnet.
$y = \frac{3254\,m \cdot \sin 45°}{\sin 60°} = 2656{,}88\,m$

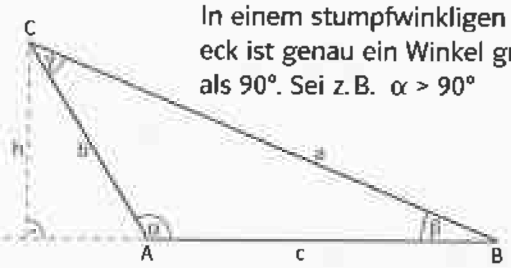
▪ Mit der Seite $x = 3629{,}37\,m$ können die fehlenden Seiten des darüber liegenden Dreiecks mit den Winkeln 58°, 65° und 57° berechnet werden, anschließend die Seiten des darüber liegenden Dreiecks mit den Winkeln 44°, 45° und 91° usw. Dabei wird die Höhe h immer so eingetragen, dass ein rechtwinkliges Teildreieck entsteht, in dem die Hypotenuse bekannt ist.



▪ Gegeben: c, α, γ
Gesucht: a
$\frac{h_b}{c} = \sin\alpha$
$h_b = c \cdot \sin\alpha$
$\frac{h_b}{a} = \sin\gamma$
$a = \frac{h_b}{\sin\gamma} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$

Analog: $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$
Regel: Sind zwei Winkel und eine Seite eines Dreiecks bekannt, so lassen sich die beiden unbekannten Seiten berechnen.
$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$
$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$
$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

▪ Der Sinussatz lautet $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist
$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin 90°} = c$
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist aber
$\frac{a}{c} = \sin\alpha$ und $\frac{b}{c} = \sin\beta$ und damit auch
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c$
Somit gilt der Sinussatz auch in rechtwinkligen Dreiecken.

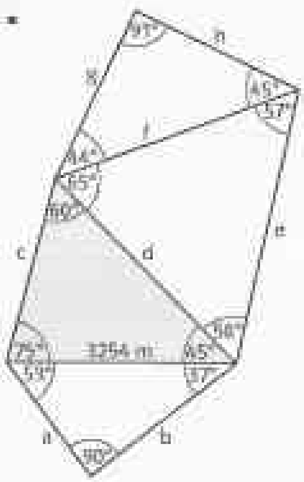


In einem stumpfwinkligen Dreieck ist genau ein Winkel größer als 90°. Sei z. B. $\alpha > 90°$

$\frac{h}{a} = \sin\beta$ $\quad h = a \cdot \sin\beta$
$\frac{h}{b} = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad h = b \cdot \sin\alpha$
$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

Somit gilt der Sinussatz auch in einem stumpfwinkligen Dreieck.

▪



$a = 1958{,}306\,m$
$b = 2598{,}760\,m$
$c = 2656{,}880\,m$
$d = 3629{,}365\,m$
$e = 3922{,}067\,m$
$f = 3669{,}947\,m$
$g = 2595{,}440\,m$
$h = 2549{,}748\,m$

▪ $\alpha = 180° - 46° - 79° = 55°$
$\frac{\overline{AB}}{\sin 79°} = \frac{2{,}4\,km}{\sin 55°}$ $\quad \overline{AB} = \frac{2{,}4\,km \cdot \sin 79°}{\sin 55°} = 2{,}876\,km$
$\frac{\overline{AC}}{\sin 46°} = \frac{2{,}4\,km}{\sin 55°}$ $\quad \overline{AC} = \frac{2{,}4\,km \cdot \sin 46°}{\sin 55°} = 2{,}108\,km$