4 Trigonometrie

Standpunkt Seite 88

Die Lösungen zum Standpunkt befinden sich am Ende des Schülerbuches

Auf und ab Seite 89

Treppen

- Miss die Stufenhöhe s und den Auftritt a der jeweiligen Treppenstufen und nutze die angegebene Formel, um das Schrittmaß der Treppe zu bestimmen.
- Man kann den Winkel messen, mit dem die Treppe ansteigt, das heißt, man legt ein Lineal von einer Kante der Treppenstufe zur nächsten und misst den Winkel zwischen dem Lineal und der Waagerechten. Ebenso kann man den Quotienten s/a aus Stufenhöhe und Auftritt angeben. Je höher der Wert, desto steiler ist die Treppe.
- Man könnte den Winkel zwischen dem Boden und dem Brett messen.

Sonnenstand am Nordkap

- Geht man davon aus, dass um 12 Uhr mittags die Sonne am höchsten steht (Bild 18), dann ist es auf dem linken Bild 19 Uhr.
- Bild 12 bzw. Bild 24
- Sie haben vom höchsten Punkt bzw. vom niedrigsten Punkt (wenn man sich die Bildfolge fortlaufend vorstellt) den gleichen Abstand.

1 Sinus. Kosinus. Tangens Seite 90

Einstieg

→ Man kann den Winkel messen oder das Verhältnis von Entfernung und Höhenunterschied zweier Punkte bestimmen.
→ Besonders gut helfen der Höhenunterschied und die Entfernung.
→ Der Steigungswinkel ist 25°.

Seite 91

1 a) (1) $\sin\alpha = \frac{8}{17} \approx 0{,}47$; $\cos\alpha = \frac{15}{17} \approx 0{,}88$;
$\tan\alpha = \frac{8}{15} \approx 0{,}53$
(2) $\sin\alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}38$; $\cos\alpha = \frac{12}{13} \approx 0{,}92$;
$\tan\alpha = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$
b) (1) $\sin\beta = \frac{15}{17} \approx 0{,}88$; $\cos\beta = \frac{8}{17} \approx 0{,}47$;
$\tan\beta = \frac{15}{8} = 1{,}875$
(2) $\sin\beta = \frac{12}{13} \approx 0{,}92$; $\cos\beta = \frac{5}{13} \approx 0{,}38$;
$\tan\beta = \frac{12}{5} = 2{,}4$

2 a) (1) $\sin\alpha = \frac{6{,}1}{7{,}5} \approx 0{,}81$; $\alpha \approx 54°$;
$\beta \approx 180° - 90° - 54° = 36°$; $\sin\beta \approx 0{,}59$
(2) $\sin\alpha = \frac{5{,}3}{6{,}2} \approx 0{,}85$; $\alpha \approx 59°$;
$\beta \approx 180° - 90° - 59° = 31°$; $\sin\beta = \sin 31° \approx 0{,}52$
b) (1) $\cos\alpha = \cos 54° \approx 0{,}59$; $\cos\beta = \frac{6{,}1}{7{,}5} \approx 0{,}81$
(2) $\cos\alpha = \cos 59° \approx 0{,}52$; $\cos\beta = \frac{5{,}3}{6{,}2} \approx 0{,}85$
Man stellt fest, dass $\sin\alpha = \cos\beta$ und $\sin\beta = \cos\alpha$.

3 a) $\sin 38° \approx 0{,}62$; $\cos 38° \approx 0{,}79$
b) $\beta = 180° - 90° - 38° \approx 52°$; $\sin 52° \approx 0{,}79$; $\cos 52° \approx 0{,}62$

4

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
sin α	**0,174**	**0,342**	**0,500**	**0,643**	**0,766**	**0,866**	**0,940**	**0,985**
cos α	**0,985**	**0,940**	**0,866**	**0,766**	**0,643**	**0,500**	**0,342**	**0,174**
tan α	**0,176**	**0,364**	**0,577**	**0,839**	**1,192**	**1,732**	**2,747**	**5,671**

Die Sinuswerte tauchen bei den Kosinuswerten erneut, aber in umgekehrter Reihenfolge auf. Es gilt: Der Wert von $\sin\alpha$ entspricht dem Wert von $\cos(90° - \alpha)$. Die Werte für $\tan\alpha$ steigen sehr stark an, wenn sich α dem Wert 90° nähert.

5 a) $\frac{h}{p} = \tan\beta$ b) $\frac{p}{a} = \cos\beta$
c) $\frac{h}{b} = \sin\alpha = \cos\varepsilon$ d) $\frac{q}{b} = \sin\varepsilon = \cos\alpha$
e) $\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$

6 a) $\sin\beta = \frac{r}{b} = \frac{h}{c} = \frac{b}{a}$ b) $\cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{s}{c}$
c) $\cos\gamma = \frac{b}{a} = \frac{r}{b} = \frac{h}{c}$ d) $\tan\gamma = \frac{c}{b} = \frac{h}{r} = \frac{s}{h}$

Seite 92

Besondere Werte

7 a) Aus $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ folgt:

$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Aus $c^2 = a^2 + a^2$ folgt: $c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

b) $\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1$

$\sin 60° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

c)

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

8 a) $\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \cos(90° - 45°) = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

$\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$(\sin 30°)^2 + (\cos 30°)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$(\sin 60°)^2 + (\cos 60°)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

b) Mit dem Taschenrechner stellt man fest, dass die Beziehungen für alle Winkel zwischen 0° und 90° gelten.

c) Nina hat recht, denn statt $\cos\alpha$ kann man auch $\sin(90° - \alpha)$ berechnen und statt $\tan\alpha$ kann man $\frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)}$ berechnen.

9 $e = a \cdot \tan 45°$ | $e = b \cdot \sin 30°$

$e = a \cdot 1$ | $e = b \cdot \frac{1}{2}$

$a = e$ | $b = 2e$

$e = c \cdot \tan 30°$ | $e = d \cdot \sin 45°$

$e = c \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $e = d \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$c = e \cdot \sqrt{3}$ | $d = e \cdot \sqrt{2}$

Umfang $u = a + b + c + d$

$u = e + 2e + \sqrt{3}e + \sqrt{2}e$

$u = e(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx 6{,}15e$

2 Rechtwinklige Dreiecke berechnen Seite 93

Einstieg

→ Aus $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{384\,000}{150\,000\,000} = 0{,}00256$ folgt $\alpha \approx 89{,}85°$.
Eine maßstäbliche Zeichnung würde sehr ungenau werden, da man als Einheit zum Beispiel 1 cm für 1 000 000 km nehmen müsste. Der Abstand von 384 000 km entspräche 0,384 cm = 3,84 mm, derjenige von 150 Mio. km entspräche 150 cm = 1,5 m.

→ Er erhielt $c = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{384\,000}{\cos 87°} \approx 7\,337\,212$ km.

Seite 94

1 a) $\sin 27{,}4° = \frac{a}{6{,}4}$; $a \approx 2{,}9$ cm

$\cos 27{,}4° = \frac{b}{6{,}4}$; $b \approx 5{,}7$ cm

$\beta = 90° - 27{,}4° = 62{,}6°$

b) $\sin 29{,}5° = \frac{6{,}9}{c}$; $c \approx 14{,}0$ cm

$\tan 29{,}5° = \frac{6{,}9}{b}$; $b \approx 12{,}2$ cm

$\beta = 90° - 29{,}5° = 60{,}5°$

c) $\tan\alpha = \frac{4{,}0}{7{,}0}$; $\alpha \approx 29{,}7°$

$\tan\beta = \frac{7{,}0}{4{,}0}$; $\beta \approx 60{,}3°$

$\sin 29{,}7° = \frac{4{,}0}{c}$; $c \approx 8{,}1$ cm

d) $\sin\alpha = \frac{5{,}7}{7{,}2}$; $\alpha \approx 52{,}3°$

$\beta \approx 90° - 52{,}3° = 37{,}7°$

$\cos 52{,}3° = \frac{b}{7{,}2}$; $b \approx 4{,}4$ cm

2 a) $\sin 32{,}5° = \frac{7{,}6}{c}$; $c \approx 14{,}1\,cm$
$\tan 32{,}5° = \frac{7{,}6}{a}$; $a \approx 11{,}9\,cm$
$\alpha = 90° - 32{,}5° = 57{,}5°$
b) $\sin\beta = \frac{2{,}6}{6{,}3}$; $\beta \approx 24{,}4°$
$\alpha \approx 90° - 24{,}4° = 65{,}6°$
$\cos 24{,}4° = \frac{a}{6{,}3}$; $a \approx 5{,}7\,cm$
c) $\tan\alpha = \frac{3{,}8}{6{,}8}$; $\alpha \approx 29{,}2°$
$\tan\beta = \frac{6{,}8}{3{,}8}$; $\beta \approx 60{,}8°$
$\sin 29{,}2° = \frac{3{,}8}{c}$; $c \approx 7{,}8\,cm$
d) $\sin 60{,}5° = \frac{b}{7{,}8}$; $b \approx 6{,}8\,cm$
$\cos 60{,}5° = \frac{a}{7{,}8}$; $a \approx 3{,}8\,cm$
$\alpha = 90° - 60{,}5° = 29{,}5°$

3 Entfernung Ahe – Cens: $\frac{\overline{AC}}{6{,}2\,km} = \sin 37°$
$\overline{AC} = 6{,}2\,km \cdot \sin 37° \approx 3{,}731\,km$
Entfernung Bergstein – Cens: $\frac{\overline{BC}}{6{,}2\,km} = \cos 37°$
$\overline{BC} = 6{,}2\,km \cdot \cos 37° \approx 4{,}952\,km$
Ahe ist etwa 3,73 km von Cens, Bergstein etwa 4,95 km entfernt.

Seite 95

4 Zeichne eine Planfigur. Markiere die gegebenen Größen und schreibe die gegebenen Winkelgrößen und Seitenlängen an den entsprechenden Stellen in der Planfigur.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	**5,4**	7,8	6,5	**7,9**	1,0	**1,8**
b	**8,0**	1,2	**6,7**	**2,8**	**5,7**	7,7
c	9,6	**7,9**	9,3	8,4	**5,8**	**7,9**
α	34,0°	**81,3°**	**44,3°**	**70,5°**	10°	**13,5°**
β	**56°**	**8,7°**	**45,7°**	19,5°	**80°**	76,5°

5 a) $c = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; $\tan\alpha = \frac{12}{5}$
$\alpha \approx 67{,}4°$; $\beta = 90° - \alpha = 22{,}6°$
b) $b = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$; $\sin\alpha = \frac{15}{17}$
$\alpha \approx 61{,}9°$; $\beta = 90° - \alpha = 28{,}1°$
c) $a = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$; $\cos\alpha = \frac{24}{25}$
$\alpha \approx 16{,}3°$; $\beta = 90° - \alpha = 73{,}7°$
d) $b = \sqrt{1378^2 - 1360^2} = 222$; $\tan\alpha = \frac{1360}{1378}$
$\alpha \approx 80{,}7°$; $\beta = 90° - \alpha = 9{,}3°$
e) $b = \sqrt{15\,641^2 - 15\,609^2} = 1000$; $\tan\alpha = \frac{15\,609}{15\,641}$
$\alpha \approx 86{,}3°$; $\beta = 90° - \alpha = 3{,}7°$

6 Die gemeinsamen Geraden von jeweils zwei benachbarten Dreiecken haben von links nach rechts die Längen 6,2 cm; 5,1 cm; 4,2 cm; x = 5,7 cm. (Zwischenwerte nicht gerundet.)

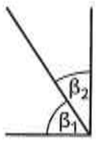
7 a) $\cos 35° = \frac{2{,}5\,cm}{b}$; $b \approx 3{,}1\,cm$
$\tan 35° = \frac{h}{2{,}5\,cm}$; $h \approx 1{,}8\,cm$
$\gamma_2 = \beta = 90° - 35° = 55°$; $\gamma_1 = 90° - 55° = 35°$
$\cos\gamma_1 = \frac{h}{a}$; $a \approx 2{,}2\,cm$
$\tan\gamma_1 = \frac{p}{h}$; $p \approx 1{,}3\,cm$
$c = p + q = 1{,}3\,cm + 2{,}5\,cm = 3{,}8\,cm$
b) $\sin 75° = \frac{6{,}2\,cm}{b}$; $b \approx 6{,}4\,cm$
$\tan 75° = \frac{6{,}2\,cm}{q}$; $q \approx 1{,}7\,cm$
$\gamma_2 = \beta = 90° - 75° = 15°$; $\gamma_1 = 90° - 15° = 75°$
$\cos 75° = \frac{b}{c}$; $c \approx 24{,}7\,cm$; $\tan 75° = \frac{a}{b}$;
$a \approx 23{,}9\,cm$; $p = 24{,}7\,cm - 1{,}7\,cm = 23\,cm$
c) $\cos 31{,}2° = \frac{5{,}8\,cm}{a}$; $a \approx 6{,}8\,cm$
$\tan 31{,}2° = \frac{h}{5{,}8\,cm}$; $h \approx 3{,}5\,cm$
$\gamma_1 = \alpha = 90° - 31{,}2° = 58{,}8°$
$\gamma_2 = \beta = 31{,}2°$
$\sin 58{,}8° = \frac{3{,}5\,cm}{b}$; $b \approx 4{,}1\,cm$
$\tan 58{,}8° = \frac{3{,}5\,cm}{q}$; $q \approx 2{,}1\,cm$
$c = 5{,}8\,cm + 2{,}1\,cm = 7{,}9\,cm$
d) $\gamma_2 = \beta = 90° - 37{,}9° = 52{,}1°$
$\gamma_1 = \alpha = 37{,}9°$
$\cos 52{,}1° = \frac{7{,}6\,cm}{a}$; $a \approx 12{,}4\,cm$
$\tan 52{,}1° = \frac{h}{7{,}6\,cm}$; $h \approx 9{,}8\,cm$
$\sin 37{,}9° = \frac{9{,}8\,cm}{b}$; $b \approx 16{,}0\,cm$
$\tan 37{,}9° = \frac{9{,}8\,cm}{q}$; $q \approx 12{,}6\,cm$
$c = 7{,}6\,cm + 12{,}6\,cm = 20{,}2\,cm$
e) $\tan\beta = \frac{8{,}0\,cm}{3{,}0\,cm}$; $\beta \approx 69{,}4°$
$\gamma_2 = \beta = 69{,}4°$
$\gamma_1 = \alpha = 90° - 69{,}4° = 20{,}6°$
$\sin 67{,}4° = \frac{8\,cm}{a}$; $a \approx 8{,}5\,cm$
$\sin 20{,}6° = \frac{8\,cm}{b}$; $b \approx 22{,}7\,cm$
$\tan 20{,}6° = \frac{8\,cm}{q}$; $q \approx 21{,}3\,cm$
$c = 3{,}0\,cm + 21{,}3\,cm = 24{,}3\,cm$

8 $\beta = 90° - 35° = 55°$
$\cos\beta = \frac{g}{a}$; $a \approx 4{,}2\,cm$; $\tan\beta = \frac{e}{g}$; $e \approx 3{,}4\,cm$;
$\sin\alpha = \frac{e}{b}$; $b \approx 5{,}9\,cm$; $\tan\alpha = \frac{e}{f}$; $f \approx 4{,}8\,cm$;
$\sin\alpha = \frac{d}{f}$; $d \approx 2{,}7\,cm$; $c \approx 7{,}2\,cm$

9 $\cos\beta_2 = \frac{7{,}6\,\text{cm}}{9{,}1\,\text{cm}}$; $\beta_2 = \alpha \approx 33{,}4°$; $\beta_1 = 56{,}6°$

$\tan\alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$; $\overline{AE} \approx 11{,}5\,\text{cm}$

$\cos\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}$; $\overline{BF} \approx 10{,}9\,\text{cm}$



10 $\tan 27{,}9° = \frac{x}{x+8} \iff \tan 27{,}9° \cdot (x+8) = x \iff$

$x \cdot \tan 27{,}9° + 8 \cdot \tan 27{,}9° = x \iff$

$x = \frac{8 \cdot \tan 27{,}9°}{1 - \tan 27{,}9°} \approx 9\,\text{cm}$

11 a) $\sin 35° = \frac{y}{x} \iff y = x \cdot \sin 35°$

$\tan 35° = \frac{y+1}{x} \iff y = x \cdot \tan 35° - 1$

$x \cdot \sin 35° = x \cdot \tan 35° - 1 \iff$

$x = \frac{1}{\tan 35° - \sin 35°} \approx 7{,}9\,\text{cm}$

$y = 7{,}9\,\text{cm} \cdot \sin 35° \approx 4{,}5\,\text{cm}$

b) $\sin 59° = \frac{y}{x} \iff y = \sin 59° \cdot x$

$\cos 59° = \frac{x}{y+5} \iff y = \frac{x}{\cos 59°} - 5$

$\sin 59° \cdot x = \frac{x}{\cos 59°} - 5 \iff$

$x = \frac{5}{\frac{1}{\cos 59°} - \sin 59°} \approx 4{,}6\,\text{cm}$

$y = \sin 59° \cdot 4{,}6\,\text{cm} \approx 3{,}9\,\text{cm}$

Seite 96

Vorsicht Steigung!

12 a) Im Verkehrszeichen sieht es so aus, als sei der rechte Winkel oben und nicht in der rechten unteren Ecke.

b) $\alpha = 5°$; $m \approx 0{,}087 = 8{,}7\,\%$

$m = 16\,\%$; $m = 0{,}16 = \frac{16}{100}$; $\alpha \approx 9{,}1°$

$m = 0{,}25$; $\alpha \approx 14°$; $m = 25\,\%$

$m = \frac{1}{3}$; $m \approx 33{,}3\,\%$; $\alpha \approx 18{,}4°$

c) $\tan 10° \approx 0{,}18$; $\tan 20° \approx 0{,}36$; $\tan 30° \approx 0{,}58$; $\tan 40° \approx 0{,}84$; $\tan 50° \approx 1{,}19$; $\tan 60° \approx 1{,}73$; $\tan 70° \approx 2{,}75$; $\tan 80° \approx 5{,}67$; $\tan 85° \approx 11{,}43$; $\tan 89° \approx 57{,}29$; $\tan 89{,}5° \approx 114{,}59$; $\tan 89{,}9° \approx 572{,}96$

d) Nein, denn dann wäre der Quotient aus α und m ein konstanter Faktor.

13 Die Entfernung von A nach B ist 5,7 cm, also 5700 m.

$\tan\alpha = \frac{1060\,\text{m} - 350\,\text{m}}{5700\,\text{m}}$; $\alpha \approx 7{,}1°$

$m \approx 0{,}124 = 12{,}4\,\%$

b) Die durchschnittliche Steigung ist 0, da man bei einer Rundfahrt ja wieder auf der Höhe des Ausgangspunktes ankommt.

14 a) Die Länge 4900 m entspricht der Hypotenuse des Dreiecks. Der Höhenunterschied beträgt 650 m.

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{650\,\text{m}}{4900\,\text{m}}$; $\alpha \approx 7{,}62°$. Die Steigung beträgt also $m = \tan 7{,}62° \approx 0{,}13 = 13\,\%$.

b) Für den horizontal gemessenen Weg b gilt:

$\tan 7{,}62° = \frac{650\,\text{m}}{b}$; $b \approx 4858{,}6\,\text{m}$.

c) Für die Steigung, die auf der Straße überwunden werden muss, spielt das keine Rolle. Möglicherweise gibt es aber einen Weg, der die Kurven abkürzt und dann noch steiler ist.

15 $\sin\alpha = \frac{265\,\text{m}}{762\,\text{m}}$; $\alpha \approx 20{,}4°$

$\sin\beta = \frac{346\,\text{m}}{434\,\text{m}}$; $\beta \approx 52{,}9°$

16 g_1: $m = 1$; $\alpha = 45°$

g_2: $m = \frac{1}{4}$; $\alpha \approx 14{,}0°$

g_3: $m = \frac{3}{4}$; $\alpha \approx 36{,}9°$

g_4: $m = -\frac{1}{2}$; $\alpha \approx -26{,}6° = 153{,}4°$

g_5: $m = 0$; $\alpha = 0°$

g_6: $m = -1$; $\alpha = -45° = 135°$

Seite 97

17 a) Für die Breite b gilt: $\tan 25° = \frac{b}{120}$; $b \approx 56\,\text{m}$.
Würde man ebenfalls unter einem Winkel von ungefähr 25° messen , dann würde man ein gerades Uferstück l von etwa $l = 10\,723\,\text{m}$ benötigen, denn $\tan 25° \approx \frac{5000}{10\,723}$. Arbeitet man mit einem etwa 100 m langen Uferstück, würde der Winkel $\alpha = 88{,}9°$ betragen. Da dieser Winkel sehr dicht an 90° liegt, bewirken kleine Messabweichungen große Fehler in der Berechnung der Breite des Flusses.

b) $\tan\alpha = \frac{0{,}106}{4800}$

Der Winkel α des Gefälles ist 0,0013°. Das entspricht einem Gefälle von $0{,}0022\,\text{m} = 2{,}2\,\text{mm}$ auf 100 m Entfernung. Ein Ball würde sicher nicht rollen.

18 a) Man rechnet $\tan 20° = \frac{80}{p}$.

Der Auftreffpunkt p läuft um 220 m hinter dem Bug her.

b) Die Bugwellen treffen das Ufer in einem Winkel von 20°. Trifft die linke Bugwelle am Ufer auf, hat die rechte Bugwelle noch eine Entfernung von $e \approx 18{,}2\,\text{m}$ zum Ufer, denn $\tan 20° = \frac{e}{50}$.

$\frac{160 - 18{,}2}{2} = 70{,}9$; die Fahrtlinie ist 70,9 m vom linken Ufer entfernt.

Man konstruiert zum Beispiel die Angaben aus Teilaufgabe a), verschiebt dann die beiden Uferlinien parallel um 18,2 m und misst, ob der Abstand zwischen den Auftreffpunkten der Bugwellen tatsächlich 50 m entspricht.

19 a) Man benötigt die Entfernung e von der Verankerung des Seils bis zum Mastfuß und den eingezeichneten Winkel α mit $\alpha = 61°$.
Man berechnet für die Höhe des Befestigungspunkts h_B: $\tan 61° = \frac{h_B}{e}$; $h_B = e \cdot \tan 61°$.
Die Gesamthöhe kann man schätzen: Sie beträgt etwa das Anderthalbfache der Höhe h_B.
Also ist $h = \frac{3}{2} \cdot e \cdot \tan 61°$.
b) Für die Seillänge s gilt $\cos 61° = \frac{e}{s}$; $s = \frac{e}{\cos 61°}$.
c) Die am weitesten hoch führenden Seile im Bild führen bis zu etwa $\frac{2}{3}$ der Höhe des gesamten Mastes. Bei den US-Sendemasten entspricht dies einer Höhe von $\frac{2}{3} \cdot 600\,\text{m}$, also 400 m. Bei gleichem Abspannwinkel der Seile von $\alpha = 61°$ berechnet man eine Seillänge von $\sin 61° = \frac{400}{s}$; also etwa $s \approx 457\,\text{m}$.
d) Wenn das Foto in einem ungünstigen Winkel aufgenommen wurde, kann man den Winkel zwischen Seil und Boden nicht messen oder aber der gemessene Winkel entspricht nicht dem tatsächlichen Winkel (siehe Seile links im Bild).

20 $\sin\alpha = \frac{15}{25} = 0{,}6$; $\alpha \approx 36{,}9°$
Tatsächliche Geschwindigkeit:
$v = \cos\alpha \cdot 25 = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Die Breite des Flusses spielt keine Rolle.

3 Allgemeine Dreiecke berechnen — Seite 98

Einstieg

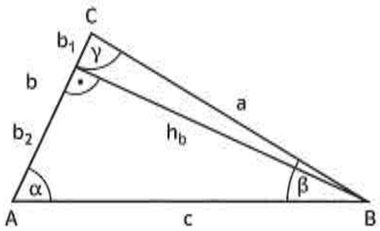
→ Für den Flächeninhalt A des dreieckigen Grundstücks gilt $A = \frac{1}{2} \cdot 31 \cdot h$; wobei h die eingezeichnete Höhe ist.
→ Im Dreieck ADC kann die gesuchte Höhe h berechnet werden:
$\sin 46° = \frac{h}{38} \Longrightarrow h = \sin 46° \cdot 38$; $h \approx 27{,}3\,\text{m}$
Flächeninhalt des Grundstücks ABC:
$A = \frac{1}{2} \cdot 31 \cdot 27{,}3 = 423{,}15$; $A = 423{,}15\,\text{m}^2$

Seite 99

1 Bei den Dreiecken sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel angegeben (SWS).
Es wird jeweils die Höhe h_a eingezeichnet. Die Bezeichnungen α_1, α_2, a_1 und a_2 entsprechen denjenigen des Beispiels im Schülerbuch.

Schritt	Formel	a)	b)
1	$\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$	$h_a \approx 4{,}1\,\text{cm}$	$h_a \approx 5{,}4\,\text{cm}$
2	$\cos\gamma = \frac{a_2}{b}$	$a_2 \approx 3{,}5\,\text{cm}$	$a_2 \approx 2{,}5\,\text{cm}$
3	$a_1 = a - a_2$	$a_1 = 4{,}4\,\text{cm}$	$a_1 = 4{,}2\,\text{cm}$
4	$\tan\beta = \frac{h_a}{a_1}$	$\beta \approx 43°$	$\beta \approx 52{,}1°$
5	$\alpha = 180° - \gamma - \beta$	$\alpha = 88{,}1°$	$\alpha = 62{,}7°$
6	$\sin\beta = \frac{h_a}{c}$	$c \approx 6{,}0\,\text{cm}$	$c \approx 6{,}8\,\text{cm}$

2 Von den Dreiecken sind jeweils eine Seite und die beiden anliegenden Winkel angegeben (WSW).
Man zeichnet die Höhe h_b ein und markiert die Abschnitte b_1 und b_2.
Die Planfigur unten kann man für beide Dreiecke verwenden.



Schritt	Formel	a)	b)
1	$\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$	$h_b \approx 5{,}0\,\text{cm}$	$h_b \approx 6{,}9\,\text{cm}$
2	$\cos\alpha = \frac{b_2}{c}$	$b_2 \approx 4{,}5\,\text{cm}$	$b_2 \approx 4{,}0\,\text{cm}$
3	$\gamma = 180° - \alpha - \beta$	$\gamma = 53{,}9°$	$\gamma = 81{,}4°$
4	$\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$	$a \approx 6{,}2\,\text{cm}$	$a \approx 7{,}0\,\text{cm}$
5	$\cos\gamma = \frac{b_1}{a}$	$b_1 \approx 3{,}7\,\text{cm}$	$b_1 \approx 1{,}0\,\text{cm}$
6	$b = b_1 + b_2$	$b = 8{,}2\,\text{cm}$	$b = 5{,}0\,\text{cm}$

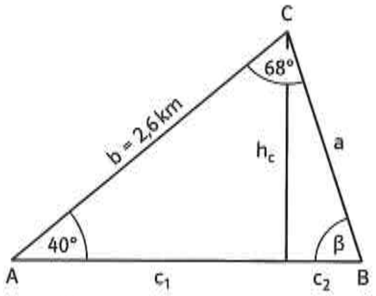
3 a) $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$; $A \approx 28{,}6\,\text{cm}^2$
b) $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$; $A \approx 17{,}6\,\text{cm}^2$
c) $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 80{,}4°$; $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$;
$A \approx 19{,}8\,\text{cm}^2$
d) $\gamma = 180° - \alpha - \beta$;
$\gamma = 180° - 76{,}2° - 38{,}8° = 65°$
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$; $A \approx 38{,}0\,\text{cm}^2$

4 a) und b) Von den Dreiecken sind jeweils zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite angegeben (SSW). Die Höhe h_b wird eingezeichnet.

c) Hier muss die Höhe h_c eingezeichnet werden.

Formel	a)	b)	c)
$\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$	$h_b \approx 4{,}1\,\text{cm}$	$h_b \approx 5{,}4\,\text{cm}$	$h_c \approx 3{,}8\,\text{cm}$
$\cos\gamma = \frac{b_1}{a}$	$b_1 \approx 2{,}8\,\text{cm}$	$b_1 \approx 2{,}2\,\text{cm}$	$c_1 \approx 0{,}8\,\text{cm}$
$b_2^2 + h_b^2 = c^2$	$b_2 \approx 4{,}4\,\text{cm}$	$b_2 \approx 3{,}0\,\text{cm}$	$c_2 \approx 6{,}7\,\text{cm}$
$\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$	$\alpha = 43{,}1°$	$\alpha = 60{,}6°$	$\beta = 29{,}6°$
$\beta = 180° - \alpha - \gamma$	$\beta = 80{,}9°$	$\beta = 51{,}8°$	$\gamma = 72°$
$b = b_1 + b_2$	$b = 7{,}2\,\text{cm}$	$b = 5{,}2\,\text{cm}$	$c = 7{,}5\,\text{cm}$

5



$\beta = 72°$

$\sin 40° = \frac{h_c}{2{,}6}$; $h_c \approx 1{,}67\,\text{km}$

$\cos 40° = \frac{c_1}{2{,}6}$; $c_1 \approx 1{,}99\,\text{km}$

$\tan\beta = \frac{h_c}{c_2}$; $c_2 \approx 0{,}6\,\text{km}$; $c = 2{,}54\,\text{km}$

$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$; $a \approx 1{,}89\,\text{km}$

Der Regattakurs ist $a + b + c \approx 7{,}0\,\text{km}$ lang.

Seite 100

6

	a)	b)	c)	d)	e)
a	9,6	9,5	**3,5**	7,6	**7,6**
b	**4,2**	7,2	3,6	**9,0**	7,5
c	**9,4**	**10,0**	**2,6**	5,5	6,0
α	**80°**	**65,0°**	67,5°	**57,7°**	**67,1°**
β	25,0°	**43,0°**	**70,1°**	85,0°	65,7°
γ	75,0°	72,0°	42,4°	**37,3°**	**47,2°**
A	**19,5**	**32,5**	**4,2**	**20,7**	**20,9**

7 Die vier Dreiecke der Dachfläche sind gleichschenklig. Ein Basiswinkel beträgt $\frac{1}{2}(180° - 41°) = 69{,}5°$.
Die Höhe h wird gezeichnet. Es ist $2 \cdot g$ die Länge der jeweiligen Dreiecksbasis.

$\sin 69{,}5° = \frac{h}{15{,}4}$; $h \approx 14{,}42$

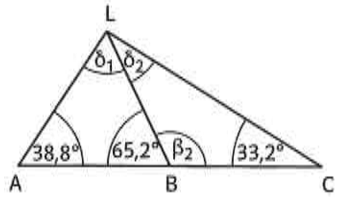
$\cos 69{,}5° = \frac{g}{15{,}4}$; $g \approx 5{,}39$

$2 \cdot g = 10{,}78$

$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10{,}78 \cdot 14{,}42 \approx 310{,}9$

Die Dachfläche A beträgt ca. $311\,\text{m}^2$.

8



a) $\delta_1 = 180° - 38{,}8° - 65{,}2° = 76°$

$\sin 38{,}8° = \frac{h_{\overline{AL}}}{5{,}62}$; $h_{\overline{AL}} \approx 3{,}52$

$\sin\delta_1 = \frac{h_{\overline{AL}}}{\overline{BL}}$; $\overline{BL} = \frac{h_{\overline{AL}}}{\sin\delta_1} \approx 3{,}63$

Das Schiff ist in B 3,6 sm vom Leuchtturm entfernt.

b) $\beta_2 = 180° - 65{,}2° = 114{,}8°$

$\delta_2 = 180° - 33{,}2° - 114{,}8° = 32°$

$\sin 32° = \frac{h_{\overline{CL}}}{\overline{BL}}$; $h_{\overline{CL}} \approx 1{,}92$

$\sin 33{,}2° = \frac{1{,}92}{\overline{BC}}$; $\overline{BC} \approx 3{,}51$

Die Strecke ist 3,5 sm lang.

sin 147° = ???

9 Der Flächeninhalt ist für beide Dreiecke $A = 10{,}7\,\text{cm}^2$.
α_1 und α_2 ergänzen sich zu 180°.

10 $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

11 a) $A \approx 17{,}6\,\text{cm}^2$
b) $A \approx 21{,}7\,\text{cm}^2$
c) $A \approx 14{,}5\,\text{cm}^2$

12 Ist $\alpha = 90°$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.
$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(90°) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$

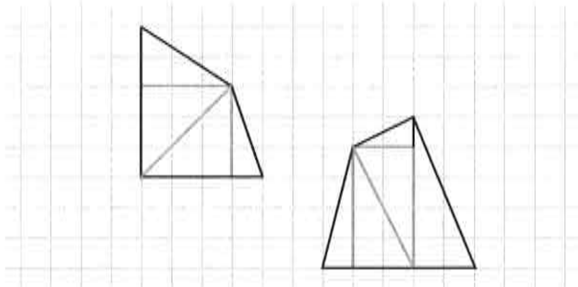
13 Mögliche Lösungen:

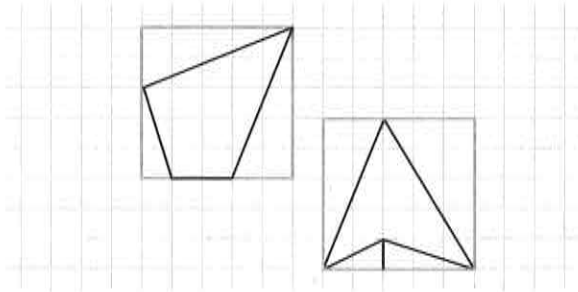
α	85°	89°	89,5°	89,9°
sin α	0,9962	0,9998	0,99996	0,999998

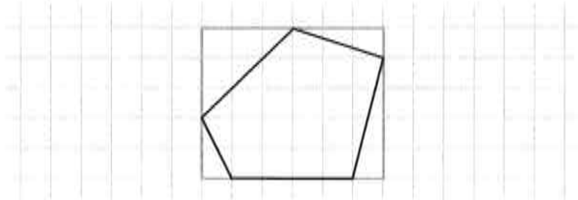
Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$ und einem Winkel α, der fast 90° ist, so sind die Seiten a und c fast gleich lang. Je näher α an 90° liegt, desto ähnlicher werden sich auch die Seitenlängen a und c. Es gilt $a : c \approx 1$. Da $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, folgt, dass $\sin\alpha = 1$. Für sin 0° ergibt das Verhältnis $\frac{a}{c} = 0$, da die Seite a verschwindet. Somit muss $\sin 0° = 0$ sein.

4 Trigonometrie in der Ebene Seite 101

Einstieg

→ 

→ 

→ 

Seite 102

1 Sei h_a die Höhe zur Seite a und E der Schnittpunkt von a und h_a; $a_1 = \overline{AE}$ und $a_2 = \overline{EB}$.

a) $\sin\alpha = \frac{h_a}{d}$; $h_a \approx 5{,}3$; $\cos\alpha = \frac{a_1}{d}$; $a_1 \approx 2{,}1$

$a_2 = a - a_1 \approx 5{,}1$;

$A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_a$; $A_{AED} \approx 5{,}6$

$A_{BCDE} = \frac{h_a + b}{2} \cdot a_2$; $A_{BCDE} \approx 22{,}7$

$A_{ABCD} = A_{BCDE} + A_{AED}$; $A_{BCD} \approx 28{,}3\,\text{cm}^2$

b) Sei e die Höhe von C zur Seite $\overline{AB}$, E ihr Lot und $f = \overline{BE}$.

$\sin(180° - \beta) = \frac{e}{b}$; $e \approx 4{,}5\,\text{cm}$

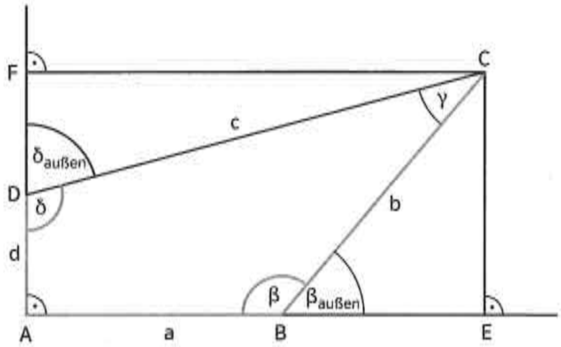
$\cos(180° - \beta) = \frac{f}{b}$; $f \approx 1{,}5\,\text{cm}$

$A_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$; $A_{BCE} = 3{,}375\,\text{cm}^2$

$A_{AECD} = \frac{d + e}{2} \cdot (a + f)$; $A_{AECD} = 45\,\text{cm}^2$

$A_{ABCD} = A_{AECD} - A_{BCE}$; $A_{ABCD} = 41{,}625\,\text{cm}^2$

2 a)



$\beta_{außen} = 180 - \beta = 50°$

$\delta_{außen} = 180 - \delta = 75°$

$\sin\beta_{außen} = \frac{\overline{EC}}{b}$; $\overline{EC} \approx 5{,}36\,\text{cm}$

$\cos\beta_{außen} = \frac{\overline{EB}}{b}$; $\overline{EB} \approx 4{,}50\,\text{cm}$

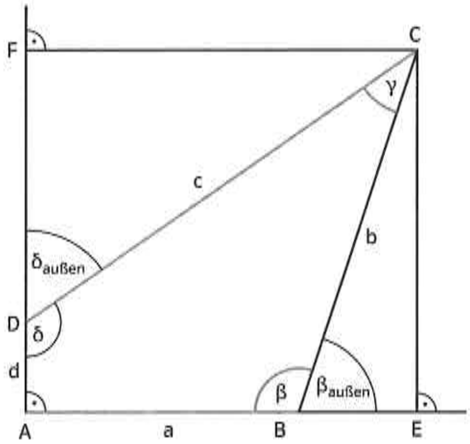
$\overline{FC} = \overline{AE} \approx 10{,}1\,\text{cm}$

$\sin\delta_{außen} = \frac{\overline{FC}}{c}$; $c \approx 10{,}46\,\text{cm}$

$\cos\delta_{außen} = \frac{\overline{DF}}{c}$; $\overline{DF} \approx 2{,}71\,\text{cm}$

$d = \overline{EC} - \overline{DF}$; $d = 2{,}65\,\text{cm}$

b)



$\delta = 360° - \alpha - \beta - \gamma = 125°$

$\beta_{außen} = 180 - \beta = 72°$

$\delta_{außen} = 180 - \delta = 55°$

$\sin\delta_{außen} = \frac{\overline{FC}}{c}$; $\overline{FC} \approx 8{,}60$

$\cos\delta_{außen} = \frac{\overline{DF}}{c}$; $\overline{DF} \approx 6{,}02$

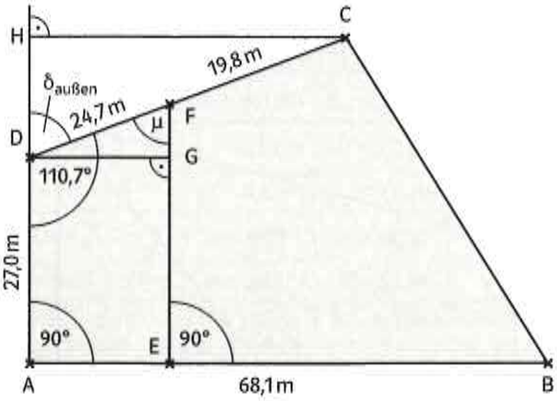
$\overline{BE} = \overline{FC} - a$; $\overline{BE} \approx 2{,}6$

$\cos\beta_{außen} = \frac{\overline{BE}}{b}$; $b \approx 8{,}41\,\text{cm}$

$\sin\beta_{außen} = \frac{\overline{CE}}{b}$; $\overline{CE} \approx 7{,}99$

$d = \overline{CE} - \overline{DF}$; $d \approx 1{,}97\,\text{cm}$

3



a) $\mu = 69{,}3°$; $\cos\mu = \frac{\overline{FG}}{\overline{DF}}$; $\overline{FG} \approx 8{,}73$

$\overline{EF} = \overline{AD} + \overline{FG}$; $\overline{EF} \approx 35{,}73$

Die neue Grenze ist etwa 35,73 m lang.

b) $\delta_{außen} = 69{,}3°$

$\sin\delta_{außen} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}$; $\overline{CH} \approx 41{,}63$

$\cos\delta_{außen} = \frac{\overline{DH}}{\overline{CD}}$; $\overline{DH} \approx 15{,}73$

$A_{ABCH} = \frac{68{,}1 + 41{,}63}{2} \cdot (15{,}73 + 27) \approx 2344{,}38$

$A_{ABCH} \approx 2344{,}38$

$A_{DCH} = \frac{\overline{CH} \cdot \overline{DH}}{2}$; $A_{DCH} \approx 327{,}42$

$A_{ABCD} = 2016{,}96$

$\mu = \delta_{außen} = 69{,}3°$

$\sin\mu = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}}$; $\overline{DG} = 23{,}1$

$A_{AEFD} = \overline{DG} \cdot \frac{\overline{AD} + \overline{EF}}{2} = 724{,}7\,m^2$

$A_{BCFE} = A_{ABCD} - A_{AEFD} = 1292{,}3\,m^2$

4 a) $\sin 70° = \frac{h}{7{,}8}$; $h \approx 7{,}3$

$A = \frac{9{,}5 + 6{,}5}{2} \cdot 7{,}3 \approx 58{,}4$

$\cos 70° = \frac{a_1}{7{,}8}$; $a_1 \approx 2{,}7$

$a_2 \approx 9{,}5 - 6{,}5 - 2{,}7 = 0{,}3$

$b^2 = a_2^2 + h_1^2$; $b \approx 7{,}3$; $u \approx 31{,}1$

Der Umfang u beträgt 31,1 cm, der Flächeninhalt A 58,4 cm².

b) $h = b \cdot \sin 76{,}2° \approx 3{,}88$

$a_2 = b \cdot \cos 76{,}2° \approx 0{,}95$

$\frac{h}{d} = \sin 55{,}6°$; $d \approx 4{,}70$

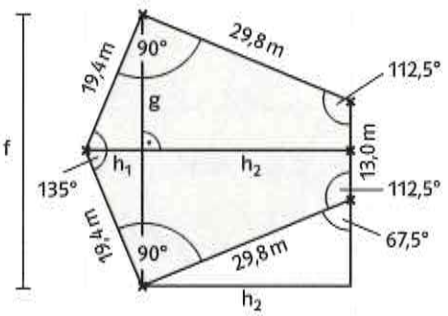
$\frac{h}{a_1} = \tan 55{,}6°$; $a_1 \approx 2{,}66$

$u \approx 8{,}7 + 4 + 5{,}09 + 4{,}7 = 22{,}49$

$A \approx \frac{(8{,}7 + 5{,}09)}{2} \cdot 3{,}88 \approx 26{,}75$

Der Umfang u beträgt 22,49 cm, der Flächeninhalt A 26,75 cm².

5 Individuelle Lösungen, zum Beispiel:



(1) Man teilt links ein Dreieck ab und berechnet das Dreieck und ein Trapez:

$\frac{135°}{2} = 67{,}5°$; $\sin 67{,}5° = \frac{g}{19{,}4}$; $g \approx 17{,}92\,m$

$f = 2 \cdot g \approx 35{,}84\,m$

$\cos 67{,}5° = \frac{h_1}{19{,}4}$; $h_1 \approx 7{,}42\,m$; $180° - 112{,}5° = 67{,}5°$

$\sin 67{,}5° = \frac{h_2}{29{,}8}$; $h_2 \approx 27{,}53\,m$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot f \cdot h_1$; $A_{Dreieck} \approx 132{,}97\,m^2$

$A_{Trapez} = \frac{13{,}0 + f}{2} \cdot h_2$; $A_{Trapez} \approx 672{,}28\,m^2$

Der Flächeninhalt A ist ca. 805,25 m².

(2) Man zeichnet das umschreibende Rechteck. Zur Berechnung des Flächeninhalts zieht man die überstehenden Flächen (Dreiecke) von der Fläche des Rechtecks ab.

$A_{FGHI} = f \cdot (h_1 + h_2) \approx 1252{,}6\,m^2$

$\cos 67{,}5° = \frac{\overline{GB}}{\overline{BA}}$; $\overline{GB} \approx 11{,}4\,m$

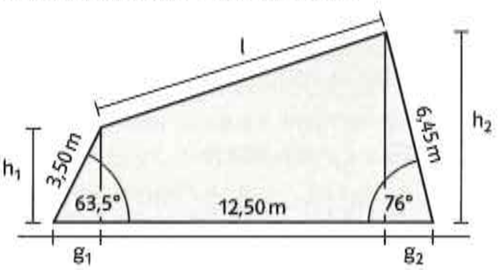
$A_{AGB} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot \overline{GB} \approx 156{,}98\,m^2$

$A_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot g \approx 66{,}48\,m^2$

$A_{ABCDE} = A_{FGHI} - 2 \cdot (A_{AGB} + A_{AEF}) \approx 805{,}68\,m^2$

Die beiden Ergebnisse sind fast identisch. Der kleine Unterschied kommt durch Rundungen der Zahlen zustande.

6 Berechnung der Giebelfläche:



$\sin 63{,}5° = \frac{h_1}{3{,}50}$; $h_1 \approx 3{,}13$

$\cos 63{,}5° = \frac{g_1}{3{,}50}$; $g_1 \approx 1{,}56$

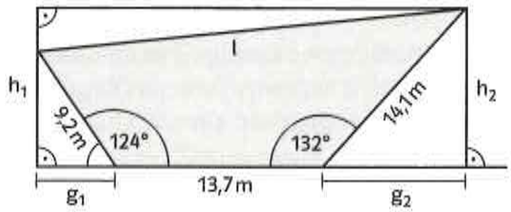
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot g_1$; $A_1 \approx 2{,}44$

$\sin 76{,}0° = \frac{h_2}{6{,}45}$; $h_2 \approx 6{,}26$

$\cos 76{,}0° = \frac{g_2}{6{,}45}$; $g_2 \approx 1{,}56$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot g_2$; $A_2 \approx 4{,}88$
$A_{Trapez} = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot (12{,}5 - g_1 - g_2)$
$A_{Trapez} \approx 44{,}04$
$A_{Giebelfläche} \approx 51{,}36$
Die Giebelfläche ist ca. $51{,}4\,m^2$ groß.
Berechnung der Dachfläche:
$l^2 = (h_2 - h_1)^2 + (12{,}5 - g_1 - g_2)^2$; $l \approx 9{,}89\,m$
$A_{Dach} = (3{,}5 + l + 6{,}45) \cdot 17{,}80 \approx 353{,}15$
Die Dachfläche ist ca. $353{,}2\,m^2$ groß.

7



a) $180° - 124° = 56°$; $180° - 132° = 48°$
$\sin 56° = \frac{h_1}{9{,}2}$; $h_1 \approx 7{,}63$
$\cos 56° = \frac{g_1}{9{,}2}$; $g_1 \approx 5{,}14$
$\sin 48° = \frac{h_2}{14{,}1}$; $h_2 \approx 10{,}48$
$\cos 48° = \frac{g_2}{14{,}1}$; $g_2 \approx 9{,}43$
$l^2 = (h_2 - h_1)^2 + (13{,}7 + g_1 + g_2)^2$; $l \approx 28{,}41$
Der Steg ist ca. 28,4 m lang.
b) $m = \frac{h_2 - h_1}{13{,}7 + g_1 + g_2} \approx 0{,}10 = 10\,\%$

Seite 103

Grundstücke vermessen

8 a) In Zeile G4 steht die Formel zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks mithilfe zweier Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (siehe hierzu Seite 98 im Schülerbuch). In der Formel wird der Winkel α von Winkelgrad in das Bogenmaß umgerechnet.
b) In Spalte B stehen die Entfernungen vom Standpunkt P zu den Eckpunkten A, B, C, … des Grundstücks. In Spalte D stehen die Winkelmaße in Grad, die die Verbindungslinien vom Standpunkt P zu den Eckpunkten der Teildreiecke PAB, PBC, … bilden. In Spalte G stehen die Flächeninhalte der Teildreiecke.
c) Um den Flächeninhalt des Grundstücks zu bestimmen, müssen die Flächeninhalte einiger Teildreiecke addiert, die anderer subtrahiert werden. Ist der Flächeninhalt eines Teildreiecks zu addieren, so steht in der Spalte H der Faktor +1, sonst der Faktor −1.
d) In Spalte G9 bzw. G21 steht die Summe der Produkte G4 · H4 + G5 · H5 + G6 · H6 bzw. G15 · H15 + G16 · H16 + G17 · H17 + G18 · H18

9

G10 ▼ = =G4*H4+G5*H5+G6*H6+G7*H7

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Flächenberechnung**							
2								
3		Strecke	Winkel	Winkelmaß		Teilfläche	Flächengröße	Faktor
4	PA	45,07	APB	34,13		PAB	1187,00	1
5	PB	93,88	BPC	32,05		PBC	2401,24	1
6	PC	96,40	CPD	18,31		PCD	795,89	1
7	PD	52,56	DPA	84,49		PAD	1178,97	−1
8	PA	45,07						
9						**gesuchte**		
10						**Fläche:**	3205,16	

Das Grundstück hat einen Flächeninhalt von $3205\,m^2$.

10 Individuelle Lösungen

5 Trigonometrie im Raum — Seite 104

Einstieg

→ Individuelle Lösungen, zum Beispiel:
HFB; EFG; HFG; HDB; HIG; FCG; ABE
→ EBH; BED

Seite 105

1 Rechtwinklig sind die Dreiecke:
BJI; CIJ; BIK; CIK

2 a) Die Seitenlängen sind a, b und c: $a = 6\,cm$; b ist die Diagonale eines der Quadrate und c die Raumdiagonale.
$a^2 + a^2 = b^2$; $b = a \cdot \sqrt{2} \approx 8{,}5$
$a^2 + 2 \cdot a^2 = c^2$; $c = a \cdot \sqrt{3} \approx 10{,}4$
Der Winkel zwischen a und b ist 90°; sei β der Winkel zwischen a und c; dann folgt
$\tan\beta = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{a}$; $\beta \approx 54{,}7°$; $\gamma \approx 35{,}3°$.
b) Die Verhältnisse der Seiten bleiben $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.
c) Zu jeder Seite gibt es zwei kongruente Dreiecke, die gespiegelt zueinander sind. Also gibt es insgesamt 24 kongruente Dreiecke.

3 a) $\overline{AE} = 6\,cm$; $a^2 + b^2 = \overline{AC}^2$; $\overline{AC} \approx 12{,}8\,cm$;
$\overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CE}^2$; $\overline{CE} \approx 14{,}1\,cm$
Sei α der Winkel zwischen $\overline{AE}$ und $\overline{AC}$, γ der Winkel zwischen $\overline{AC}$ und $\overline{EC}$ und ε der dritte Winkel.
$\alpha = 90°$; $\tan\gamma = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$; $\gamma \approx 25{,}1°$; $\varepsilon = 64{,}9°$
b) Zu jeder der 6 cm langen Seiten gibt es zwei spiegelbildliche Dreiecke, also insgesamt 8.

c) Dreieck BHE: Sei ε der Winkel zwischen $\overline{BE}$ und $\overline{EH}$, β der Winkel zwischen $\overline{BE}$ und $\overline{BH}$.
$\varepsilon = 90°$; $\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BE}^2$; $\overline{BE} = 10\,cm$;
$\tan\beta = \frac{\overline{EH}}{\overline{EB}}$; $\beta = 45°$; $\eta = 45°$.
Dreieck ABH: Der Winkel zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{AH}$ ist 90°.
Berechnung von $\overline{AH}$:
$\overline{AE}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{AH}^2$; $\overline{AH} \approx 11{,}7\,cm$
Berechnung des Winkels δ zwischen $\overline{HA}$ und $\overline{HB}$:
$\tan\delta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}$; $\delta \approx 34{,}45°$; $\varphi = 55{,}55°$

4 $\tan\varphi = \frac{\overline{SM}}{\overline{EM}} = \frac{146{,}60}{115{,}15}$; $\varphi \approx 51{,}9°$

$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{2 \cdot 230{,}30^2} \approx 325{,}7$

$\tan\alpha = \frac{\overline{SM}}{\frac{\overline{BD}}{2}} = \frac{146{,}60}{162{,}847}$; $\alpha \approx 42{,}0°$

5 a) $h = 7{,}25 \cdot \tan 72° \approx 22{,}313$
$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot 14{,}5^2 \cdot 22{,}313 \approx 1563{,}77$;
$V \approx 1563{,}8\,cm^3$
b) $h = 25{,}4 \cdot \sin 75° \approx 24{,}535$
$\frac{d}{2} = 25{,}4 \cdot \cos 75° \approx 6{,}574$; $d = 13{,}148$
$2a^2 = d^2 \Longrightarrow a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{13{,}148^2}{2} = 86{,}435$
$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot 86{,}435 \cdot 24{,}535 = 706{,}894$
$V \approx 706{,}9\,cm^3$

Regelmäßige Vieleckpyramiden

6 a) Grundflächeninhalt einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide:
$\alpha = \frac{360°}{n}$
$\frac{\frac{a}{2}}{h_a} = \tan\frac{\alpha}{2}$ $\quad h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}}$
Flächeninhalt eines Dreiecks:
$A_D = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}}}{2} = \frac{a^2}{4 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}}$
Flächeninhalt des n-Ecks:
$A = n \cdot A_D = n \cdot \frac{a^2}{4 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}}$
b) Regelmäßige achtseitige Pyramide
$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$
$G = 8 \cdot \frac{6^2}{4 \cdot \tan\frac{45°}{2}} = \frac{72}{\tan 22{,}5°}$; $G \approx 173{,}8\,cm^2$
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 173{,}823 \cdot 15$
$V \approx 869{,}1\,cm^3$

c) Regelmäßige zwölfseitige Pyramide
$\alpha = \frac{360°}{12} = 30°$
$G = 12 \cdot \frac{5^2}{4 \cdot \tan\frac{30°}{2}} = \frac{75}{\tan 15°}$; $G \approx 279{,}9\,cm^2$
$V \approx \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 279{,}904 \cdot 10$
$V \approx 933{,}0\,cm^3$
Kegel
$u = 2\pi r \Longrightarrow r = \frac{u}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} \approx 9{,}5$
$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3} \cdot 9{,}5^2 \cdot \pi \cdot 10$
$V \approx 945{,}1\,cm^3$
Die regelmäßige zwölfseitige Pyramide hat nahezu das gleiche Volumen, wie ein Kegel, dessen Grundfläche den gleichen Umfang hat.

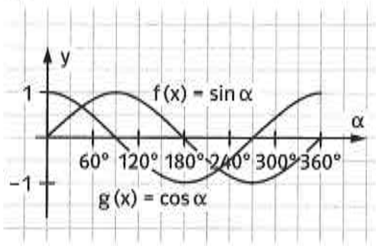
6 Sinusfunktion. Kosinusfuktion — Seite 106

Einstieg

→ Vom unteren Einstiegspunkt bis auf die halbe Höhe des Riesenrades bewegt sich die Gondel nach rechts aufwärts und vom höchsten Punkt bis zur halben Höhe nach links abwärts.
→ Die markierte Gondel befindet sich
- nach 15 s am höchsten Punkt.
- nach 30 s auf halber Höhe genau gegenüber dem Ausgangspunkt.
- nach 45 s am tiefsten Punkt (Ein- und Ausstieg).
- nach 60 s an der Ausgangsstelle.
- nach 90 s wie nach 30 s, also auf halber Höhe gegenüber dem Ausgangspunkt.

Seite 107

1 a)



b) siehe Abbildung 1 unten

2 Im dritten Quadranten sind die Werte von Sinus und Kosinus negativ.

3 a) $\alpha \approx 11{,}54°$ und $\alpha \approx 168{,}46°$
b) $\alpha \approx 72{,}54°$ und $\alpha \approx 287{,}46°$
c) $\alpha \approx 64{,}16°$ und $\alpha \approx 115{,}84°$
d) $\alpha \approx 45{,}57°$ und $\alpha \approx 314{,}43°$
e) $\alpha \approx 104{,}48°$ und $\alpha \approx 255{,}52°$
f) $\alpha \approx 233{,}13°$ und $\alpha \approx 306{,}87°$

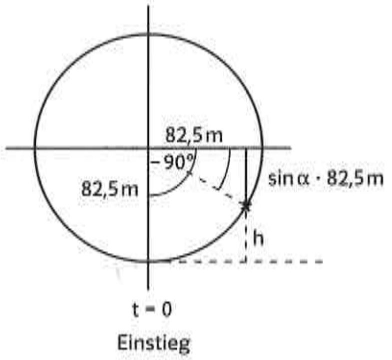
4 a) Denselben Sinuswert ergeben: 50° und 130°; 160° und 20°; 250° und 290°; 100° und 80°; 310° und 230°; 190° und 350°; 200° und 340°
b) Denselben Kosinuswert ergeben: 220° und 140°; 200° und 160°; 60° und 300°; 250° und 110°; 10° und 350°; 190° und 170°; 210° und 150°

DGS und Sinusfunktion

5 Wenn der Punkt P sich im Intervall [0; 90°] von 0° nach 90° bewegt, so wird die y-Koordinate (Sinus) immer größer, die x-Koordinate (Kosinus) dafür immer kleiner. Am Funktionsgraphen kann man ablesen, dass die Werte in diesem Intervall positiv sind und steigen. Entsprechende Beobachtungen kann man machen, wenn P sich in den Intervallen [90°; 180°], [180°; 270°] und [270°; 360°) bewegt.

Seite 108

6 a) Der Startpunkt zur Zeit $t = 0$ befindet sich im Punkt $P(0\,|\,-82{,}5)$. Der Winkel beträgt $-90°$ (siehe Skizze).



Das Riesenrad dreht sich pro Minute um $\frac{360°}{60} = 6°$, also in zehn Minuten um 60°.
Somit ergeben sich folgende Winkelwerte:
nach 10 Minuten: $-90° + 60° = -30°$
nach 20 Minuten: $-90° + 120° = 30°$
nach 40 Minuten: $-90° + 240° = 150°$
Die aktuelle Höhe h berechnet sich gemäß Skizze mit der Formel
$h = 82{,}5 \cdot \sin\alpha + 82{,}5 = 82{,}5 \cdot (1 + \sin\alpha)$.

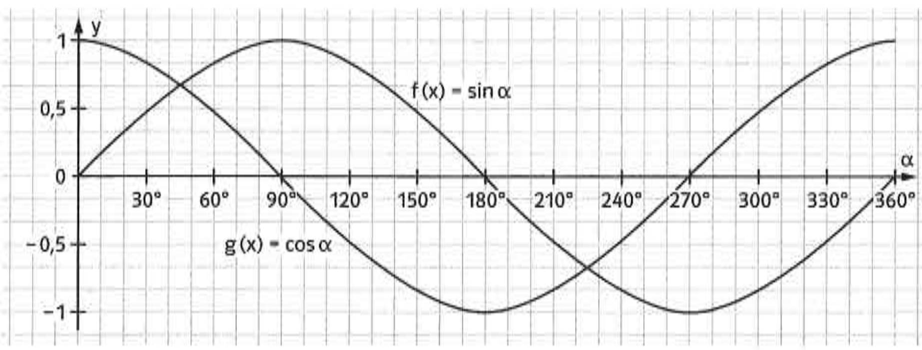
Fahrzeit in Minuten	10	20	40
Winkel α	−30°	30°	150°
Höhe in Meter	41,25	123,75	123,75

b) Wie in Aufgabe a) wird die Höhe für fünf, zehn und fünfzehn Minuten bestimmt.

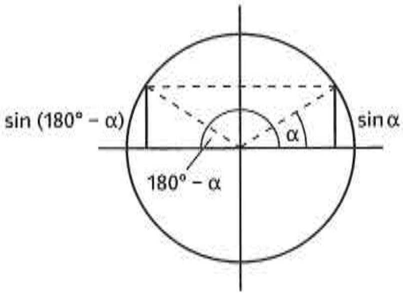
Zeit in Minuten	0	5	10	15
Höhe in Meter	0	11,05	41,25	82,5
Höhenzuwachs in Meter	11,05	30,20	41,25	

Aus der Tabelle ist zu entnehmen, dass die Gondel in den ersten fünf Minuten um 11,05 m, in den zweiten fünf Minuten um 30,20 m und in den dritten fünf Minuten um 41,25 m steigt.

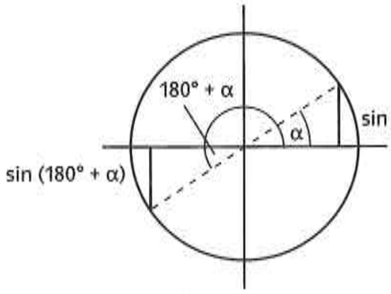
Abbildung 1



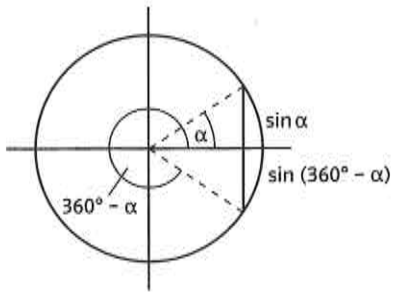
7 a) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$



b) $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$



c) $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$



8 Die Sinuskurve muss um 270° (nach rechts) oder um −90° (nach links) verschoben werden, damit sie mit der Kosinuskurve zusammenfällt.

Periodizität

9 $\sin 390° = \sin(30° + 1 \cdot 360°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 390° = \cos(30° + 1 \cdot 360°) = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$P\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$

$\sin 420° = \sin(60° + 1 \cdot 360°) = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 420° = \cos(60° + 1 \cdot 360°) = \cos 0° = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$\sin(-45°) = \sin(-45° + 1 \cdot 360°) = \sin 315° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos(-45°) = \cos(-45° + 1 \cdot 360°) = \cos 315° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$P\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \,\middle|\, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$\sin(-540°) = \sin(-540° + 2 \cdot 360°) = \sin 180° = 0$

$\cos(-540°) = \cos(-540° + 2 \cdot 360°) = \cos 180° = -1$

$P(-1 \mid 0)$

$\sin 810° = \sin(90° + 2 \cdot 360°) = \sin 90° = 1$

$\cos 810° = \cos(90° + 2 \cdot 360°) = \cos 90° = 0$

$P(0 \mid -1)$

$\sin 1110° = \sin(30° + 3 \cdot 360°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 1110° = \cos(30° + 3 \cdot 360°) = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$P\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$

$\sin(-1240°) = \sin(-1240° + 4 \cdot 360°) = \sin 200°$

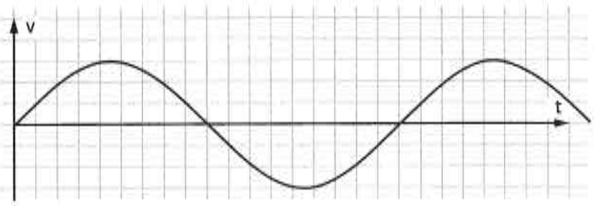
$\approx -0{,}34$

$\cos(-1240°) = \cos(-1240° + 4 \cdot 360°) = \cos 200°$

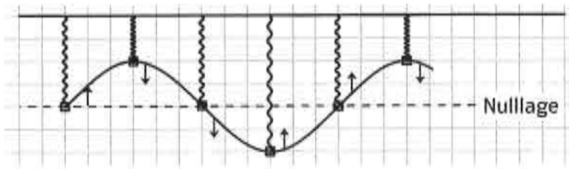
$\approx -0{,}93$

$P(-0{,}93 \mid 0{,}34)$

10 Befinden sich Lampe, Radnabe und schattenwerfender Stab in einer Ebene, so ist die Schattengeschwindigkeit auf der Leinwand am größten. Wandert der Schatten von dort aus nach oben bzw. nach unten, so nimmt die Geschwindigkeit des Schattens ab. Am obersten bzw. untersten Punkt ist die Schattengeschwindigkeit null. Anschließend wandert der Schatten nach unten bzw. oben und seine Geschwindigkeit nimmt wieder zu, bis er in der Mitte wieder die höchste Geschwindigkeit erreicht hat. Dieser Zyklus wiederholt sich, solange sich das Rad mit konstanter Geschwindigkeit dreht.
Der Graph des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms ist eine Sinuskurve.



Auch das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines ungedämpften Federpendels ist eine Sinuskurve.



In der Nulllage hat das Gewichtsstück die größte Geschwindigkeit. Schwingt es von der Nulllage aus nach oben bzw. unten, so wird es bis zur höchsten bzw. tiefsten Lage immer langsamer. Schwingt es anschließend vom höchsten bzw. tiefsten Punkt nach unten bzw. oben, so nimmt die Geschwindigkeit des Gewichtsstücks zu, bis es in der Nulllage wieder die Höchstgeschwindigkeit erreicht hat.

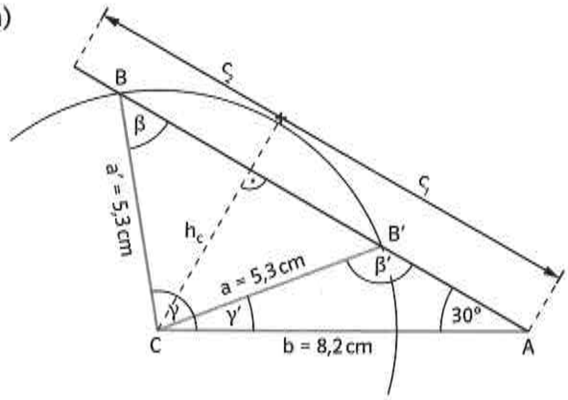
Rechentraining Seite 110

Die Lösungen zum Rechentraining befinden sich am Ende des Schülerbuches.

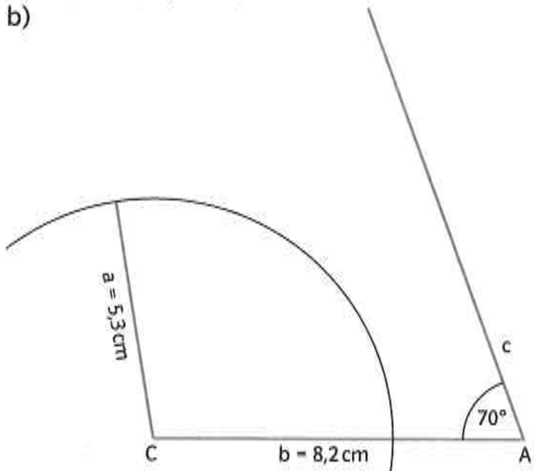
Üben • Anwenden • Nachdenken Seite 111

1 a) $c \approx 8{,}02\,cm$; $a \approx 6{,}19\,cm$; $\alpha = 50{,}5°$
b) $h_a \approx 4{,}14\,cm$; $a_2 \approx 2{,}63\,cm$; $a_1 \approx 5{,}17\,cm$;
$\beta \approx 38{,}69°$; $\alpha \approx 83{,}71°$; $c \approx 6{,}62\,cm$
c) $\gamma = 46{,}1°$; $h_b \approx 3{,}22\,cm$; $b_2 \approx 7{,}43\,cm$;
$a \approx 4{,}47\,cm$; $b_1 \approx 3{,}10\,cm$; $b = 10{,}53\,cm$
d) $a_1 \approx 2{,}36\,cm$; $h_a \approx 5{,}62\,cm$; $\gamma \approx 51{,}31°$;
$\alpha \approx 61{,}49°$; $a_2 \approx 4{,}50\,cm$; $a = 6{,}86\,cm$
e) $\gamma = 90°$; $c \approx 8{,}85\,cm$; $b \approx 7{,}01\,cm$

2 a)



$h_c \approx 4{,}1\,cm$; $c_1 \approx 7{,}1\,cm$
(1) Dreieck ABC: $\beta \approx 50{,}68°$; $c_2 \approx 3{,}36\,cm$
$c = 10{,}46\,cm$; $\gamma = 99{,}32°$
(2) Dreieck AB'C: $\beta' \approx 129{,}32°$; $c'_2 = -3{,}36\,cm$
$c' = 3{,}74\,cm$; $\gamma' \approx 20{,}68°$
b)



Man erhält keinen Schnittpunkt für B.
Es entsteht kein Dreieck.

3 a) $A = 8{,}75\,cm^2$
b) Man sucht einen Winkel α, für den gilt:
$\sin 30° = \sin\alpha \Longrightarrow \alpha = 150°$

4 $A = \frac{1}{2} \cdot 8{,}2 \cdot c \cdot \sin 67{,}0° \Longrightarrow c \approx 7{,}95\,cm$

5 a) Dreieck links, dritte Seite s: $s = e$
Dreieck rechts, Teilstrecke von $\overline{AB}$ g: $g = \sqrt{3} \cdot e$
Es gilt also: $\overline{AB} = e + 2e + \sqrt{3} \cdot e = e(3 + \sqrt{3})$

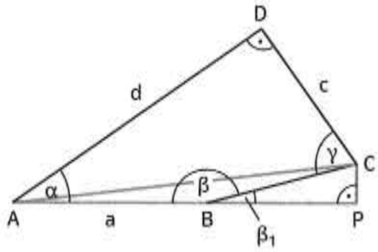
Fläche des Trapezes:
$A = \frac{1}{2} \cdot (2e + e(3 + \sqrt{3})) \cdot e = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \cdot e^2$
b) $e \approx 6\,cm$

6 $y = e$; $\tan 30° = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{y}{y + x}$; $x = e \cdot (\sqrt{3} - 1)$

7 a) Im Parallelogramm ist $h_a = 5\,cm \cdot \sin\alpha$.
$A_R = 10\,cm \cdot 5\,cm = 50\,cm^2$
$A_P = 25\,cm^2 = 10\,cm \cdot h_a = 10\,cm \cdot 5\,cm \cdot \sin\alpha$;
$\alpha = 30°$ oder $\alpha = 150°$
b) $A_P = 10\,cm \cdot h_a = 10\,cm \cdot 5\,cm \cdot \sin 45°$
$\approx 35{,}36\,cm^2$
$\frac{A_R}{A_P} = \frac{50\,cm^2}{35{,}36\,cm^2} \approx 1{,}41$; also ist A_R um 41% größer als A_P.

c) $A_P = 10\,cm \cdot h_a = 10\,cm \cdot 5\,cm \cdot \sin 1° \approx 0{,}87\,cm^2$
$\frac{A_P}{A_R} = \frac{0{,}87\,cm^2}{50\,cm^2} \approx 0{,}017$; also nimmt A_P 1,7% der Fläche von A_R ein.

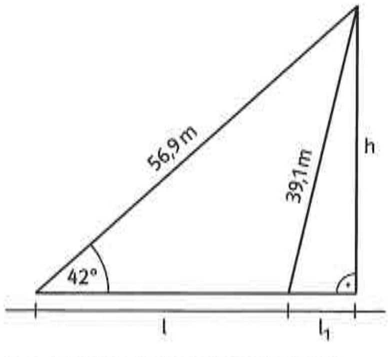
8



Die Höhe durch C auf die Seite a schneidet ihre Verlängerung in P. Man berechnet zuerst das Dreieck BPC.
$\beta_1 \approx 14{,}7°$; $\overline{BP} \approx 3{,}97\,cm$; $\overline{PC} \approx 1{,}04\,cm$;
$A_{BPC} = 2{,}06\,cm^2$
Man berechnet nun $\overline{AC}$: $\overline{AC} = \sqrt{c^2 + d^2} \approx 9{,}13\,cm$
$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2} \approx 9{,}07\,cm$;
$A_{APC} = 0{,}5 \cdot 9{,}07\,cm \cdot 1{,}04\,cm = 4{,}72\,cm^2$
$A_{ACD} = 0{,}5 \cdot c \cdot d = 17{,}6\,cm^2$
$A_{ABCD} = A_{ACD} + A_{APC} - A_{BPC} = 20{,}26\,cm^2$

Ein günstiger Kauf?

9



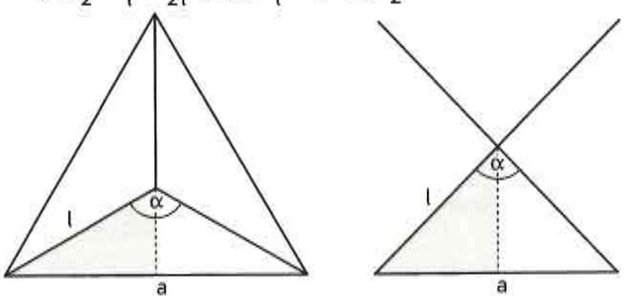
$h = 56{,}9\,m \cdot \sin 42° \approx 38{,}07\,m$
$l + l_1 = 56{,}9\,m \cdot \cos 42° \approx 42{,}28\,m$
$l_1 = \sqrt{39{,}1^2 - 38{,}07^2} \approx 8{,}92\,m$; $l = 33{,}6\,m$
$A = 0{,}5 \cdot l \cdot h = 635\,m^2$

Trixi hat sich verrechnet. Das Grundstück ist sogar ein bisschen kleiner als angegeben. Trixi hat vermutlich bei der Rechnung die Längen $l + l_1$ und l_1 addiert, statt zu subtrahieren.

Seite 112

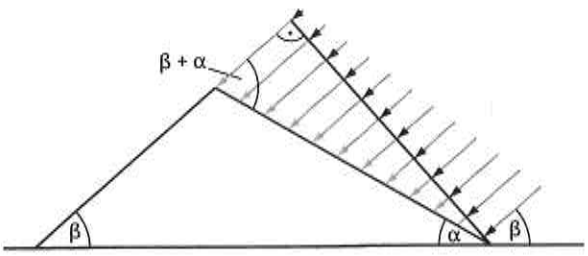
10 Stühle kippen über die Linie, die die Füße verbindet (Abstand a). Als Maß ist deshalb das Verhältnis von Abstand a zu Beinlänge l geeignet. Ist der Winkel zwischen den Beinen α, dann gilt:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{l} = \frac{a}{2l}$ bzw. $\frac{a}{l} = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$



3 Beine; $\alpha = 120°$; $2 \cdot \sin 60° \approx 1{,}73$
4 Beine; $\alpha = 90°$; $2 \cdot \sin 45° \approx 1{,}41$
5 Beine; $\alpha = 72°$; $2 \cdot \sin 36° \approx 1{,}18$
6 Beine; $\alpha = 60°$; $2 \cdot \sin 30° \approx 1$
Je niedriger der Wert für den Sinus ist, desto höher ist die Standsicherheit.

11 Es ist $\frac{b}{c} = \sin\beta$.
a) mittags am Sommeranfang ($\beta = 65°$):
$\sin 65° \approx 0{,}91 = 91\,\%$
am Herbstanfang ($\beta = 42°$):
$\sin 42° \approx 0{,}670 = 67\,\%$
am Winteranfang ($\beta = 19°$):
$\sin 19° \approx 0{,}326 = 32{,}6\,\%$
b) Der Winkel erhöht sich jeweils um 20°.
mittags am Sommeranfang:
$\sin 85° \approx 0{,}996 = 99{,}6\,\%$
am Herbstanfang: $\sin 62° \approx 0{,}883 = 88{,}3\,\%$
am Winteranfang: $\sin 39° \approx 0{,}629 = 62{,}9\,\%$
c) In der Regel unter einem Winkel zwischen 20° und 23°.
Ist α der Neigungswinkel der Solarzelle und β der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen, so muss gelten: $\alpha + \beta > 50$
Damit ist $\sin(\alpha + \beta) = 0{,}76 = 76\,\%$.
Da andererseits $\alpha + \beta < 110°$ sein sollte, ergibt sich ein optimaler Neigungswinkel von $\alpha = 30°$.



d) Damit der Gesamtwinkel $\alpha + \beta$ je nach Größe des Einfallswinkels β verändert und optimal eingestellt werden kann.

12 a) $h = 80 \cdot \tan\alpha$

α	20°	30°	40°	50°	60°	70°
h_1 in m	28,3	45,3	65,9	93,7	135,8	214,0
h in m	29,1	46,2	67,1	95,3	138,6	219,8
h_2 in m	29,9	47,1	68,3	97,0	141,4	225,9
$\frac{h_2 - h_1}{h}$	5,5 %	3,9 %	3,6 %	3,5 %	4,0 %	5,4 %

b) $h = 80 \cdot \tan\alpha$; $h_1 = 79{,}95 \cdot \tan\alpha$;
$h_2 = 80{,}05 \cdot \tan\alpha$

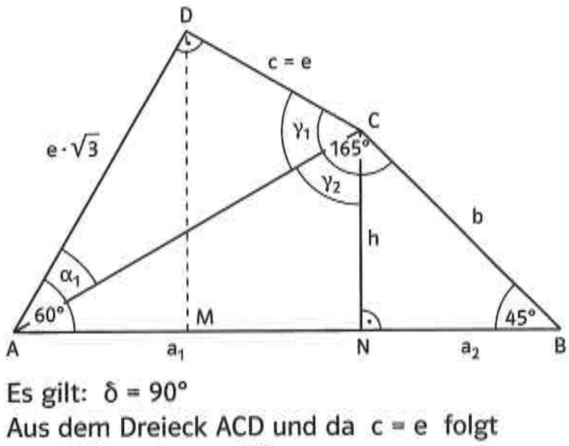
α	20°	30°	40°	50°	60°	70°
h_1 in m	29,1	46,2	67,1	95,3	138,5	219,7
h in m	29,1	46,2	67,1	95,3	138,6	219,8
h_2 in m	29,1	46,2	67,2	95,4	138,7	219,9

c) geringste Höhe für $h_1 = 102{,}5 \cdot \tan 60°$
$\approx 177{,}54\,\text{m}$;
höchste Höhe für $h_2 = 103{,}5 \cdot \tan 62° \approx 194{,}66\,\text{m}$
Die Höhe des Masts liegt somit zwischen ca. 177,54 m und ca. 194,66 m.

Seite 113

13 a) $\tan\alpha = \frac{6{,}5}{4{,}8} \Longrightarrow \alpha \approx 53{,}6°$
b) $l = \sqrt{6{,}5^2 + 4{,}8^2} \approx 8{,}08$; $s = \frac{6{,}5}{\sin 18°} \approx 21{,}03$
Die Länge der Böschung auf der Landseite beträgt ca. 8,1 m, diejenige auf der Seeseite ca. 21,0 m.
c) Berechnung der Deichsohlenlänge d
$d = 4{,}8 + 7 + s \cdot \cos 18° \approx 31{,}8$
Berechnung der Querschnittsfläche A
$A = \frac{1}{2}(d + 7) \cdot 6{,}5 = 126{,}1$
Die Deichsohlenlänge beträgt ca. 31,8 m, die Querschnittsfläche ca. 126 m².

14



Es gilt: $\delta = 90°$
Aus dem Dreieck ACD und da $c = e$ folgt $\alpha_1 = 30°$ und $\gamma_1 = 60°$.
Somit ist auch $\gamma_2 = 60°$ und es gilt: $h = e$; $a_1 = e\sqrt{3}$ (da die Dreiecke ACD und ANC kongruent sind).

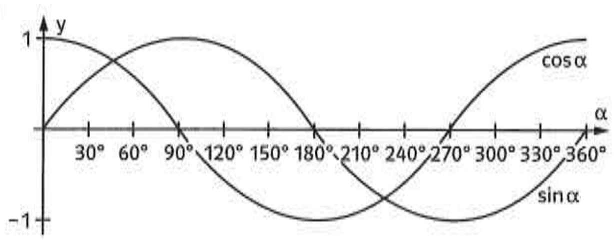
Das rechtwinklige Dreieck BCN hat einen 45°-Winkel, ist also gleichschenklig
$a_2 = h = e;\ b = e \cdot \sqrt{2}$
$a = a_1 + a_2 = e\sqrt{3} + e = e(\sqrt{3} + 1)$
Somit ist $u = a + b + c + e\sqrt{3}$
$= e(\sqrt{3} + 1) + e\sqrt{2} + e + e\sqrt{3}$
$= e(2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{2})$

15 a) $\frac{\overline{HG}}{2} = f \cdot \sin\frac{\alpha}{2};\ \overline{HG} = a \approx 18\,\text{cm}$
$c = f \cdot \sin\beta \approx 12\,\text{cm};\ \overline{MC} = f \cdot \cos\beta \approx 12\,\text{cm}$
Mit dem Satz von Pythagoras: $b = 7{,}94\,\text{cm}$
b) $\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a$
$\tan\beta = \frac{a}{\overline{MC}};\ \beta \approx 41{,}8°$
$\overline{MG} = \frac{3}{2} \cdot a$ (Satz von Pythagoras)
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{MG}};\ \alpha \approx 38{,}9°$

16 $\frac{r}{6{,}6} = \tan 20° \Longrightarrow r = 6{,}6 \cdot \tan 20°;\ r \approx 2{,}4\,\text{cm}$
$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}40^2 \cdot \pi \cdot 6{,}6;\ V \approx = 39{,}8\,\text{cm}^3$

17 Gegeben: Grundfläche a^2, Körperhöhe h und Neigungswinkel α
$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Longrightarrow h = \frac{a}{2}\tan\alpha$
$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}\tan\alpha = \frac{1}{6}a^3\tan\alpha$
Für $\alpha = 30°$ und $a = 10\,\text{cm}$:
$\frac{1}{6} \cdot 1000\,\text{cm}^3 \cdot \tan 30° \approx 96{,}2\,\text{cm}^3$
Für $\alpha = 45°$ und $a = 10\,\text{cm}$:
$\frac{1}{6} \cdot 1000\,\text{cm}^3 \cdot \tan 45° \approx 166{,}7\,\text{cm}^3$
Für $\alpha = 60°$ und $a = 10\,\text{cm}$:
$\frac{1}{6} \cdot 1000\,\text{cm}^3 \cdot \tan 60° \approx 288{,}7\,\text{cm}^3$

18 a) $\sin 220° = -\sin 140°$ und $\sin 310° = -\sin 50$
also $\sin 50° + \sin 140° + \sin 220° + \sin 310°$
$= \sin 50° + \sin 140° - \sin 140° - \sin 50° = 0$
b) Individuelle Lösungen, zum Beispiel:
$\sin 40° + \sin 150° + \sin 220° + \sin 330° = 0$
Für den Kosinus existieren ebenfalls solche Winkel, z. B.
$\cos 30° + \cos 150° + \cos 210° + \cos 330° = 0$

19


a) Für $\alpha = 45°$ und $\alpha = 225°$ haben die Sinus- und die Kosinusfunktion denselben Wert.
Für $\alpha = 135°$ und $\alpha = 315°$ hat die Sinusfunktion den entgegengesetzten Wert der Kosinusfunktion.
b) Für alle Winkel zwischen 45° und 225° sind die Werte der Sinusfunktion größer als die Werte der Kosinusfunktion. Für alle Winkel zwischen 0° und 45° bzw. 225° und 360° sind die Werte der Sinusfunktion kleiner als die der Kosinusfunktion.
c) In den Intervallen [0°; 90°] und [270°; 360°] steigt die Sinusfunktion. Im Intervall [90°; 270°] fällt die Sinusfunktion. Im Intervall [270; 360°] steigt sowohl die Sinus- als auch die Kosinusfunktion.

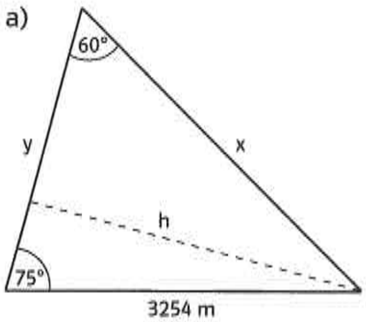
20 a) In 5 s wird $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ des Kreises durchlaufen.
Der Drehwinkel beträgt demnach
$\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.
$P_{5s}(\cos 120° \mid \sin 120°);\ P_{5s}(-0{,}5 \mid 0{,}866)$
b) In 1 s wird $\frac{1}{15}$ des Kreises durchlaufen.
Der Drehwinkel beträgt $\frac{1}{15} \cdot 360° = 24$:
$P_{1s}(\cos 24° \mid \sin 24°);\ P_{1s}(0{,}914 \mid 0{,}407)$
c) In 10 s wird $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ des Kreises durchlaufen.
Der Drehwinkel beträgt $\frac{2}{3} \cdot 360° = 240$:
$P_{10s}(\cos 240° \mid 240°);\ P_{10s}(-0{,}5 \mid -0{,}866)$

21 a) Reihenfolge der Eckpunkte entgegen dem Uhrzeigersinn, beginnend mit dem Punkt auf der x-Achse im ersten Quadranten:
$P_1(x \cdot \cos 0° \mid y \cdot \sin 0°);\ P_1(x \mid 0)$
$P_2(x \cdot \cos 60° \mid y \cdot \sin 60°);\ P_2(0{,}5x \mid 0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
$P_3(x \cdot \cos 120° \mid y \cdot \sin 120°);\ P_3(-0{,}5x \mid 0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
$P_4(x \cdot \cos 180° \mid y \cdot \sin 180°);\ P_4(-x \mid 0)$
$P_5(x \cdot \cos 240° \mid y \cdot \sin 240°);$
$P_5(-0{,}5x \mid -0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
$P_6(x \cdot \cos 300° \mid y \cdot \sin 300°);\ P_6(0{,}5x \mid -0{,}5\sqrt{3} \cdot y)$
b) Reihenfolge der Eckpunkte entgegen dem Uhrzeigersinn, beginnend mit dem Punkt im ersten Quadranten:
$P_1(x \cdot \cos 30° \mid y \cdot \sin 30°);\ P_1(0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid 0{,}5y)$
$P_2(x \cdot \cos 90° \mid y \cdot \sin 90°);\ P_2(0 \mid y)$
$P_3(x \cdot \cos 150° \mid y \cdot \sin 150°);\ P_3(-0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid 0{,}5y)$
$P_4(x \cdot \cos 210° \mid y \cdot \sin 210°);$
$P_4(-0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid -0{,}5y)$
$P_5(x \cdot \cos 270° \mid y \cdot \sin 270°);\ P_5(0 \mid -y)$
$P_6(x \cdot \cos 330° \mid y \cdot \sin 330°);\ P_6(0{,}5\sqrt{3} \cdot x \mid -0{,}5y)$

Seite 114

Arbeit sparen mit dem Sinussatz

22 a)



$\frac{h}{3245\,m} = \sin 75° \implies h = 3254\,m \cdot \sin 75°$

$\frac{h}{x} = \sin 60° \implies h = x \cdot \sin 60°$

$\implies 3254\,m \cdot \sin 75° = x \cdot \sin 60°$

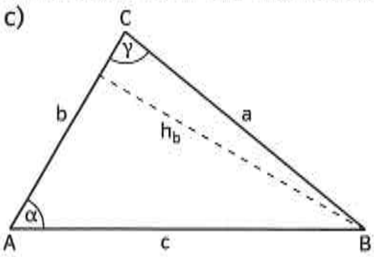
$x = \frac{3254\,m \cdot \sin 75°}{\sin 60°} \approx 3629{,}37\,m$

Analog wird y berechnet.

$y = \frac{3254\,m \cdot \sin 45°}{\sin 60°} \approx 2656{,}88\,m$

b) Mit der Seite $x = 3629{,}37\,m$ können die fehlenden Seiten des darüber liegenden Dreiecks mit den Winkeln 58°, 65° und 57° berechnet werden, anschließend die Seiten des darüber liegenden Dreiecks mit den Winkeln 44°, 45° und 91° usw. Dabei wird die Höhe h immer so eingetragen, dass ein rechtwinkliges Teildreieck entsteht, in dem die Hypotenuse bekannt ist.

c)



Gegeben: c, α, γ

Gesucht: a

$\frac{h_b}{c} = \sin\alpha \implies h_b = c \cdot \sin\alpha$

$\frac{h_b}{a} = \sin\gamma \implies a = \frac{h_b}{\sin\gamma} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$

Analog: $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

Regel: Sind zwei Winkel und eine Seite eines Dreiecks bekannt, so lassen sich die beiden unbekannten Seiten berechnen.

$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$

$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$

$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

23 Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin 90°} = c.$

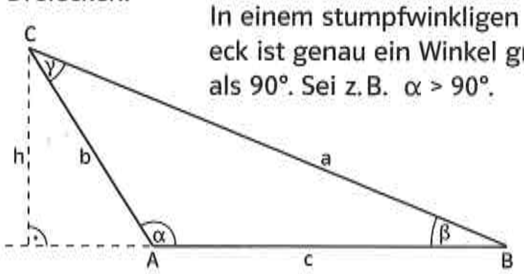
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist aber

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$ und $\frac{b}{c} = \sin\beta$ und damit auch

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c.$

Somit gilt der Sinussatz auch in rechtwinkligen Dreiecken.

In einem stumpfwinkligen Dreieck ist genau ein Winkel größer als 90°. Sei z.B. $\alpha > 90°$.



$\frac{h}{a} = \sin\beta \implies h = a \cdot \sin\beta$

$\frac{h}{b} = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha \implies h = b \cdot \sin\alpha$

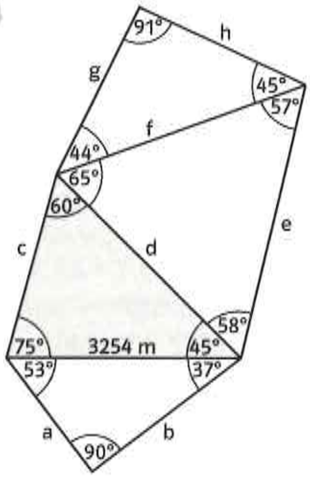
Also gilt: $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$

und somit: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

Somit gilt der Sinussatz auch in einem stumpfwinkligen Dreieck.

$a \approx 1958{,}3\,m$

24



$a \approx 1958{,}3\,m$
$b \approx 2598{,}8\,m$
$c \approx 2656{,}9\,m$
$d \approx 3629{,}4\,m$
$e \approx 3922{,}1\,m$
$f \approx 3669{,}9\,m$
$g \approx 2595{,}4\,m$
$h \approx 2549{,}7\,m$

25 $\alpha = 180° - 46° - 79° = 55°$

$\frac{\overline{AB}}{\sin 79°} = \frac{2{,}4}{\sin 55°} \implies \overline{AB} = \frac{2{,}4 \cdot \sin 79°}{\sin 55°} \approx 2{,}9\,km$

$\frac{\overline{AC}}{\sin 46°} = \frac{2{,}4}{\sin 55°} \implies \overline{AC} = \frac{2{,}4 \cdot \sin 46°}{\sin 55°} \approx 2{,}1\,km$

Die Entfernung $\overline{AB}$ beträgt 2,9 km, die Entfernung $\overline{AC}$ 2,1 km.

Rückspiegel Seite 115

Die Lösungen zum Rückspiegel befinden sich am Ende des Schülerbuches.